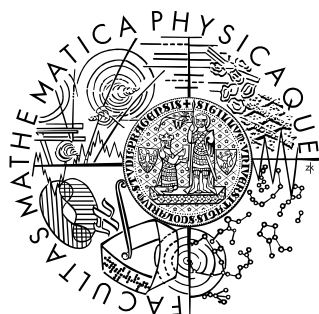


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Alexander Tomori

Interakce vln a částic v magnetosféře Země

Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Studijní program: Fyzika – Fyzika povrchů a ionizovaných
prostředí

Praha 2012

Rád by som poďakoval docentovi Ondřejovi Santolíkovi za vedenie tejto práce a jeho pripomienky. Mojej rodine a priateľke ďakujem za podporu, pochopenie a nekonečnú trpezlivosť.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze 3. augusta 2012

Alexander Tomori

Název práce: Interakce vln a částic v magnetosféře Země

Autor: Alexander Tomori

Katedra: Katedra fyziky povrchů a plazmatu

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

e-mail vedoucího: Ondrej.Santolik@mff.cuni.cz

Abstrakt: V tejto práci sa venujeme interakciám vln a častíc v magnetosfére Zeme. Po teoretickom úvode hľadáme disperznú reláciu plazmy z parametrov získaných z časticového analyzátoru PEACE na družici Cluster a identifikujeme jednotlivé vlnové módy. Disperzná relácia je získaná numericky pomocou programu WHAMP, ktorý pracuje s teóriou horúcej plazmy. Skúmame rôzne smery šírenia vln a hľadáme nestability. Sledujeme závislosť maximálnej pozorovanej nestability na zmene parametrov plazmy a hľadáme parametre s čo najväčšou nestabilitou. V závere sa snažíme pomocou numerického integrovania teoreticky overiť závislosť rastu na jednotlivých zložkách plazmy a jej parametroch, zvlášť na stratovom kuželi.

Klíčová slova: magnetosféra, disperzní relace, distribuční funkce, stratový kužel, nestabilita

Title: Wave-particle interactions in the Earth's magnetosphere

Author: Alexander Tomori

Department: Department of Surface and Plasma Science

Supervisor: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Supervisor's e-mail address: Ondrej.Santolik@mff.cuni.cz

Abstract: In this work we analyse wave-particle interactions in the Earth's magnetosphere. After the theoretical introduction we find the dispersion relation of plasma described by parameters obtained from the particle analyser PEACE aboard Cluster spacecraft and we identify possible wave modes. The dispersion relation is derived using software WHAMP, which uses numerical approach and works with hot plasma theory. Various directions of wave propagation are analysed in order to find instabilities. We look at how maximal found instability changes while varying plasma parameters and we try to find plasma parameters leading to higher instabilities. Using numerical integration we try to verify dependency of instabilities on different plasma components and its parameters, especially on loss cone.

Keywords: magnetosphere, dispersion relation, distribution function, loss cone, instability

Obsah

1	Úvod	1
2	Magnetosféra	2
2.1	Topológia magnetosféry Zeme	2
2.1.1	Slnečný vietor	2
2.1.2	Rázová vlna	4
2.1.3	Plazmosféra	4
2.1.4	Van Allenove radiačne pásy	4
2.1.5	Elektrické prúdy v magnetosfére Zeme	6
3	Vlny v plazme	8
3.1	Typy vln v plazme, stručný prehľad	9
3.1.1	Elektrostatické vlny	9
3.1.2	Elektromagnetické vlny	11
3.2	Elektrostatické vlny v horúcej plazme bez magnetického poľa	15
3.2.1	Prístup podľa Vlasova	15
3.2.2	Prístup podľa Landaua	18
3.2.3	Landauovo tlmenie	19
3.3	Vlny v horúcej plazme v magnetickom poli	21
3.3.1	Elektrostatické vlny	22
3.3.2	Elektromagnetické vlny	26
4	Ciele práce	33
5	Praktická časť	34
5.1	Model plazmy, numerické hľadanie disperznej relácie programom WHAMP	34
5.2	Dáta z družice Cluster	35
5.3	Nájdenie disperznej relácie pre rôzne smery šírenia vlny	37
5.4	Bernsteinove módy	37
5.5	Hľadanie rastu	42
5.6	Hľadanie rezonančnej rýchlosti	42
5.7	Analýza stability	42
6	Diskusia a záver	52
7	Zoznam použitých značiek	54
	Literatúra	55

Kapitola 1

Úvod

Sme zvyknutí, že svetlo sa šíri „rýchlosťou svetla“ (alebo tesne menšou, ak nie sme vo vákuu) a vzťah medzi jeho frekvenciou a vlnovou dĺžkou pozná snáď každý stredoškôľák. Možno šikovnejší stredoškôľák vie, že ak sa svetlo šíri v opticky anizotropnom prostredí, napr. v islandskom vápenci, rozdelí sa na dva lúče. Šírenie elektromagnetických a elektrostatických vĺn v plazme s magnetickým poľom (anizotropia) je v tomto smere oveľa bohatšie a komplexnejšie — vlny sa môžu šíriť mnohými spôsobmi s rôznymi polarizáciami. Mód voľného priestoru, ktorý sme na začiatku spomenuli, je len jedným špeciálnym prípadom.

Disperzná relácia je vzťah, ktorý pre dané prostredie (v našom prípade horúcu plazmu s magnetickým poľom) dáva do súvisu komplexnú frekvenciu a vlnovú dĺžku vlny. Výhoda komplexnej frekvencie je v tom, že jej imaginárna časť nám dáva informáciu o tlmení, resp. zosilení vlny. Vlna sa šíri v prostredí, v ktorom sa nachádzajú častice nesúce energiu, a preto tieto vlny nemusia byť len tlmené, ako sme bežne zvyknutí, ale ak s časticami vhodne interagujú a získajú energiu na ich úkor, môžu byť aj zosilené (hovoríme o nestabilite).

Získanie komplexnej disperznej relácie daného prostredia je preto veľmi dôležité pre pochopenie toho, ktoré vlny sa v danom prostredí šíriť môžu a ktoré nie, a či sú tlmené alebo zosilené. Disperznú reláciu je možné určiť z rýchlostného rozdelenia častíc, ktoré získame napr. z časticového analyzátoru na palube umelej družice, ktorej dráha daným miestom prechádza. Aby prostredie mohlo odovzdať vlne energiu, musí mať distribučná funkcia popisujúca rýchlostné rozdelenie častíc správny tvar, musí obsahovať nestability. Pri prístupe pomocou teórie horúcej plazmy s magnetickým poľom, ktorá je presnejšia a popisuje javy, ktoré v teórii studenej plazmy nenájdeme, však zistíme, že na výpočet disperznej relácie je potrebné použiť numerické metódy, a to často aj v jednoduchých prípadoch.

Znalosť parametrov plazmy a následne disperznej relácie v oblastiach magnetosféry Zeme nám lepšie umožní pochopiť vznik a šírenie jednotlivých typov vĺn, ktoré pozorujeme.

V tejto práci budeme hľadať disperznú reláciu na základe parametrov plazmy získaných družicou z projektu Cluster II, budeme sledovať, ako sa vlny v tomto prostredí šíria v jednotlivých smeroch a budeme hľadať nestabilné vlnové módy a skúmať, s ktorými parametrami plazmy a útvarmi v distribučnej funkcii súvisí ich nestabilita.

Kapitola 2

Magnetosféra

2.1 Topológia magnetosféry Zeme

Magnetosféra Zeme je vonkajším pokračovaním ionosféry Zeme, ktoré so Zemou magneticky súvisí. Je to oblasť, v ktorej je dominantným magnetické pole Zeme. Tvar magnetosféry je daný interakciou magnetického poľa Zeme so slnečným vetrom a magnetickým poľom Slnka.

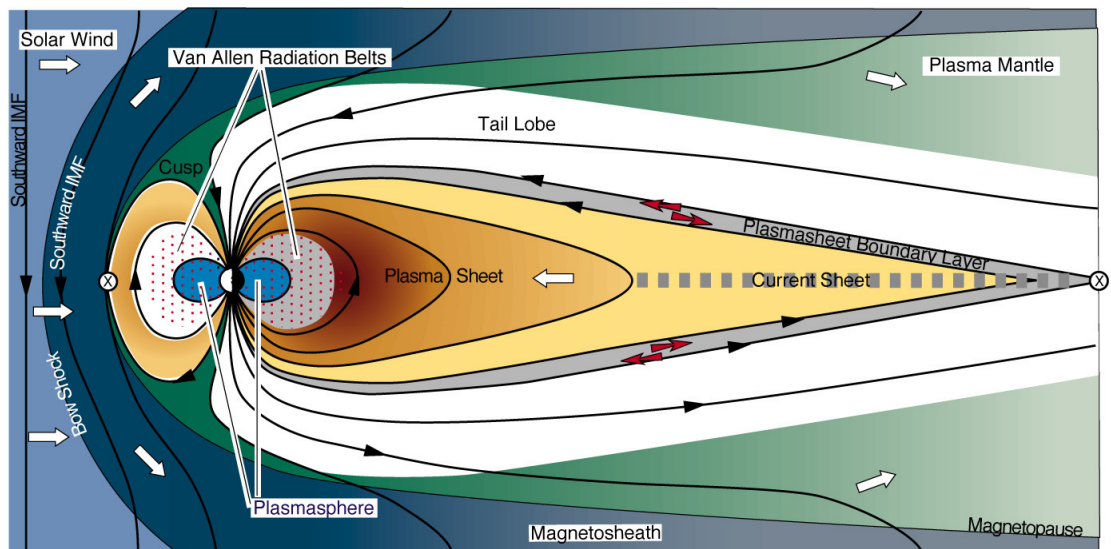
Ak by bolo magnetické pole Zeme ničím nerušené, mohli by sme ho aproximovať dipólovým poľom s osou sklonenou voči rotačnej osi Zeme o približne 11° . Tlakom slnečného vetra je toto pole deformované a je mu vtlačený jeho charakteristický tvar pretiahnutý v smere od Slnka. Táto oblasť je nazývaná magnetosférou a tieni Zem pred prevažnou väčšinou nabitých častíc zo slnečného vetra.

Tvar magnetosféry môžeme vidieť na obr. 2.1. Z vnútornej strany je ohraničená ionosférou Zeme niekoľko stovák kilometrov nad povrchom Zeme. Vonkajšou hranicou je *magnetopauza*. Z dennej strany (strana smerom k Slnku) je ohraničená rázovou vlnou vo vzdialenosti približne $14 R_Z$. Opačným smerom magnetosféra siaha až do vzdialenosti rádovo $100 R_Z$, priemer magnetosféry je tu približne $20\text{--}30 R_Z$. Konkrétny tvar magnetosféry je veľmi závislý na aktuálnych podmienkach slnečného vetra. Zdrojom častíc v magnetosfére je slnečný vietor a ionosféra Zeme.

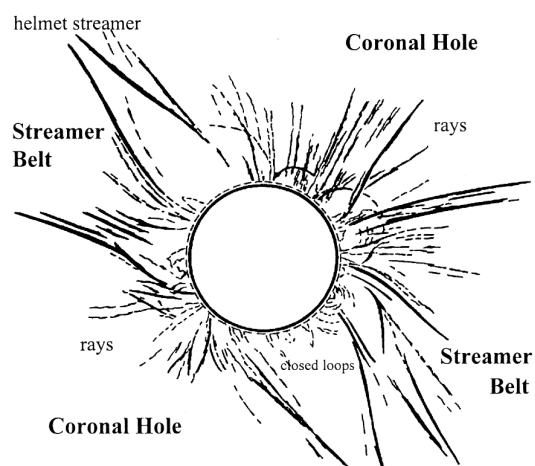
2.1.1 Slnečný vietor

Slnečný vietor výraznou mierou formuje tvar magnetosféry a zmeny v slnečnej aktivite spôsobujú variácie v podmienkach magnetosféry Zeme.

Slnečný vietor je tok nabitých častíc zo Slnka. Tvoria ho najmä protóny, elektróny, malé percento alfa častíc a zlomok percenta ťažších iónov. Za jednu sekundu je zo Slnka vyvrhnutých rádov milión ton látky. Rýchlosť slnečného vetra je $250\text{--}400\text{ km/s}$ pre pomalý slnečný vietor (koncentrácia $\approx 8\text{ cm}^{-3}$ vo vzdialenosti 1 AU) a $400\text{--}800\text{ km/s}$ pre rýchly slnečný vietor (koncentrácia $\approx 3\text{ cm}^{-3}$). Tieto rýchlosti sú nadzvukové – rádovo 40-krát vyššie než rýchlosť šírenia zvuku v tomto prostredí. Rýchlosť šírenia slnečného vetra súvisí s oblasťou Slnka, z ktorej vychádza. V oblastiach tzv. koronálnych dier, kde sú magnetické čiary Slnka otvorené (t.j. smerujú do okolitého priestoru, väčšinou v okolí pólů Slnka), prúdi rýchly slnečný vietor. Naopak, oblasti uzatvore-



Obr. 2.1: Topológia magnetosféry Zeme. Prevzaté z <http://space.rice.edu/IMAGE/livefrom/sunearth.html>.



Obr. 2.2: Štruktúra slnečnej koróny. V koronálnych dierach (otvorené magnetické siločiar) je rýchlosť slnečného vetra vyššia ako v oblastiach uzatvorených magnetických siločiar. Kresba z úplného zatmenia Slnka v júli 1991. Prevzaté z *Lang* (1995).

ných magnetických siločiar neumožňujú unikáť nabitým časticiam takouto rýchlosťou (obr. 2.2). V čase slnečného minima to sú oblasti prúdovej vrstvy okolo heliografického rovníka, v okolí slnečného maxima nad aktívnymi oblasťami (*May-Britt* (2001)). Teplota elektrónov v slnečnom vetre dosahuje 10^5 K.

2.1.2 Rázová vlna

Rázová vlna je všeobecne vzaté oblasť, v ktorej dochádza u niektorých veličín k skokovým zmenám hodnôt. V prípade rázovej vlny v magnetosfére Zeme ide o koncentráciu častíc, teplotu, veľkosť a smer rýchlosti častíc a magnetické pole. V rázovej vlne dochádza k spomaleniu rýchlosti častíc z nadzvukovej na podzvukovú rýchlosť. V dôsledku toho sa zvyšuje koncentrácia častíc a menia sa aj magnetické pole a rýchlosť častíc slnečného vetra.

Rázová vlna magnetosféry Zeme sa nachádza na dennej strane medzi Slnkom a Zemou vo vzdialenosti približne $14 R_Z$ a má hrúbku 100–1000 km (obr. 2.1).

S rázovou vlnou v magnetosfére Zeme súvisí tzv. rýchla magnetoakustická vlna. Tá spolu s tzv. pomalou magnetoakustickou a Alfvénovou vlnou tvoria nízkofrekvenčné vlny súvisiace s pohybom iónov v plazme s magnetickým poľom.

Rázovú vlnu majú všetky planetárne telesá s magnetosférou alebo s voľnou ionosférou.

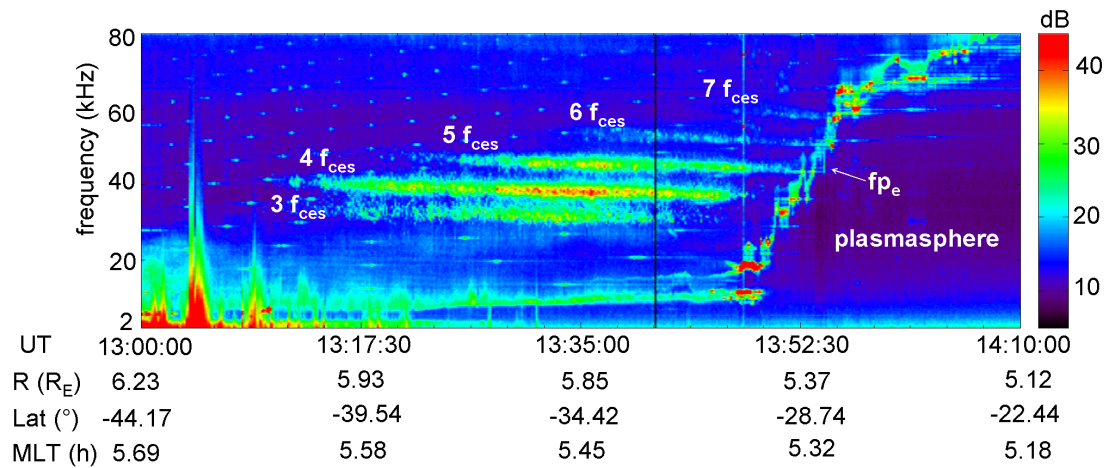
2.1.3 Plazmosféra

Plazmosféra magnetosféry Zeme je vnútorná časť magnetosféry ktorá krotuje so Zemou. Nabité častice z ionosféry môžu v určitých oblastiach (v stredných až vyšších magnetických šírkach) vystupovať pozdĺž uzavretých magnetických siločiar, až kým sa rozdiel tlakov pozdĺž tejto silokrivky nevyrovná a nenastane rovnováha. Táto oblasť uzavretých magnetických siločiar nad ionosférou je plazmosféra. Neexistuje žiadna výrazná hranica medzi ionosférou a plazmosférou, plazmosféru preto môžeme chápať ako predĺženie ionosféry. Vonkajšia hranica plazmosféry sa nazýva plazmopauza.

Idete teda o oblasť zásobovanú prevažne časticami z ionosféry Zeme, nie slnečným vetrom. Charakteristickými parametrami sú preto vysoká koncentrácia častíc (100 cm^{-3} a viac) a nízka teplota, takže nepredstavuje nebezpečenstvo pre umelé družice alebo ľudské posádky. Na obr. 2.3 môžeme vidieť prelet družice z programu Cluster plazmopauzou. V čase približne 13:52:30 UT je viditeľný prudký nárast lokálnej plazmovej frekvencie, čo priamo súvisí s nárastom koncentrácie častíc — sonda práve vošla do plazmosféry z vonkajšieho priestoru.

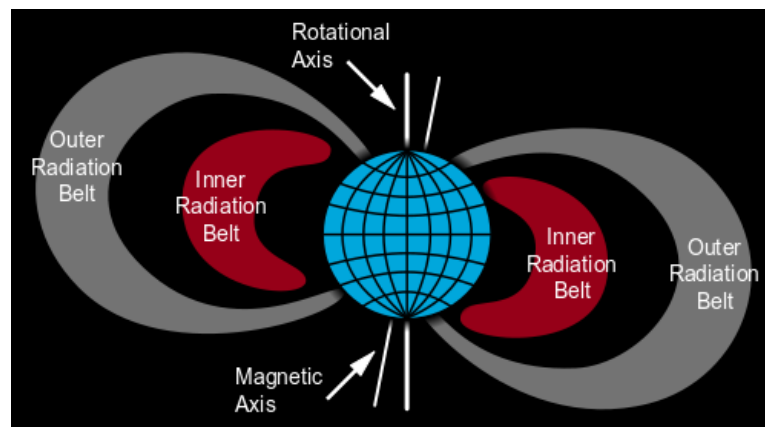
2.1.4 Van Allenove radiačné pásy

Za plazmosférou sa nachádza oblasť obsahujúca nabité častice síce o nízkej koncentrácii, avšak s vysokými energiami. Hlavným zdrojom je záchyt častíc zo slnečného vetra, pôvod častíc však môže byť aj z chvosta magnetosféry, prípadne urýchľovanie častíc pomocou rôznych mechanizmov.



Obr. 2.3: Dynamické spektrum intenzity elektrického poľa z prístroja WHISPER na palube družice programu Cluster z 3. januára 2006. V čase približne 13:52:30 UT nastáva prudký nárast lokálnej plazmovej frekvencie (na obrázku označené f_{pe}) a teda aj koncentrácie častíc. Sonda vstúpila do plazmosféry. Prevzaté z *Grimald and Santolík* (2010).

Radiačne pásy sa delia na vnútorný a vonkajší (obr. 2.4). Vnútorný pás siaha od 200–1000 km nad povrchom Zeme až po $2,5 R_Z$ od stredu Zeme a obsahuje elektróny o energiách ≈ 100 keV a vysokoenergetické protóny o energiách ≈ 100 MeV, ktoré vznikajú z interakcií kozmického žiarenia s vrchnou časťou atmosféry Zeme. Oblasť, kde sa vnútorný radiačný pás najviac približuje k Zemi (pomyselný stred pásov je mierne vychýlený od stredu Zeme), sa nazýva juhoatlantická anomália, čo vedie v tejto oblasti k zvýšenému toku energetických častíc prenikajúcich do vrchnej atmosféry. V tejto oblasti je magnetické pole Zeme najslabšie.



Obr. 2.4: Schéma Van Allenových radiačných pásov. Prevzaté z http://en.wikipedia.org/wiki/File:Van_Allen_radiation_belt.svg.

Vonkajší radiačný pás sa rozprestiera vo vzdialenosti približne $3 R_Z$ až $7 R_Z$ od stredu Zeme s najväčšou intenzitou vo vzdialenosti $4\text{--}5 R_Z$. Obsahuje prevažne energetické elektróny o energiách približne 10 MeV, ktoré sú injektované z chvostu magnetosféry a urýchľované interakciami s vlnami.

Častice sú v radiačných pásoch zachytávané kvôli magnetickým zrkadlám.

Únik častíc do atmosféry Zeme v polárnych oblastiach súvisí s polárnymi žiarami.

Van Allenove radiačne pásy sú nebezpečné pre elektroniku sond a ľudí. Dráhy sond sú upravené tak, aby sondy touto oblasťou preleteli čo najrýchlejšie, kozmické lode s ľudskými posádkami sú zasa na nižších dráhach, ktoré nezasahujú do radiačných pásov (napr. ISS, Space Shuttle...), avšak aj tak sú ovplyvnené vyššie zmienenou juhoatlantickou anomáliou.

V oblasti vonkajšieho radiačného pásu sa nachádza aj geostacionárna orbitálna dráha, ktorej geocentrická vzdialenosť je $6,6 R_Z$.

2.1.5 Elektrické prúdy v magnetosfére Zeme

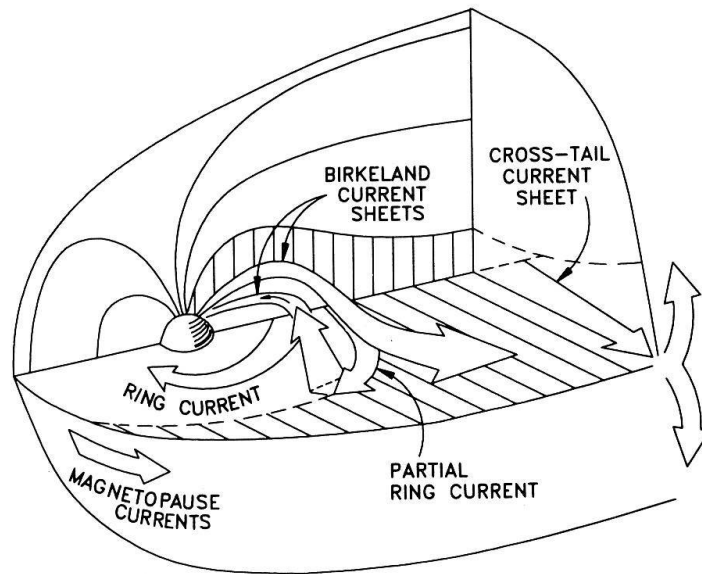
Magnetické pole v magnetosfére nie je určované len magnetickým poľom Zeme, ale aj pohybmi nabitých častíc — elektrickými prúdmi. Medzi hlavné systémy elektrických prúdov v magnetosfére patrí prstencový prúd, prúdová vrstva magnetopauzy a prúdová vrstva neutrálnej vrstvy (obr. 2.5 a 2.6).

Prstencový prúd je spôsobený driftom (drift spôsobený zakrivením siločiar), keď nabité častice uväznené v blízkosti Zeme magnetickými zrkadlami vykonávajú okrem pohybu v smere sever-juh aj driftový pohyb v smere východ-západ, pričom elektróny sú unášané na východ a kladné ióny na západ (záporný smer pri pohľade „zhora“ ako na obr. 2.5, teda zo severu). Týmto vzniká elektrický prúd. Prstencový prúd leží približne v rovine magnetického rovníka a rozprestiera sa vo vzdialenostiach $2-7 R_Z$. Prstencový prúd generuje magnetické pole, ktoré vo vonkajších oblastiach zosiluje účinky poľa Zeme (a pomáha tak zväčšovať rozmery magnetosféry), avšak v blízkosti Zeme pôsobí proti magnetickému poľu Zeme. Počas magnetických búrok, keď plazma v oblasti prstencového prúdu je zásobená novými časticami a prstencový prúd zosilnie, je možné pozorovať zoslabenie poľa pri Zemi.

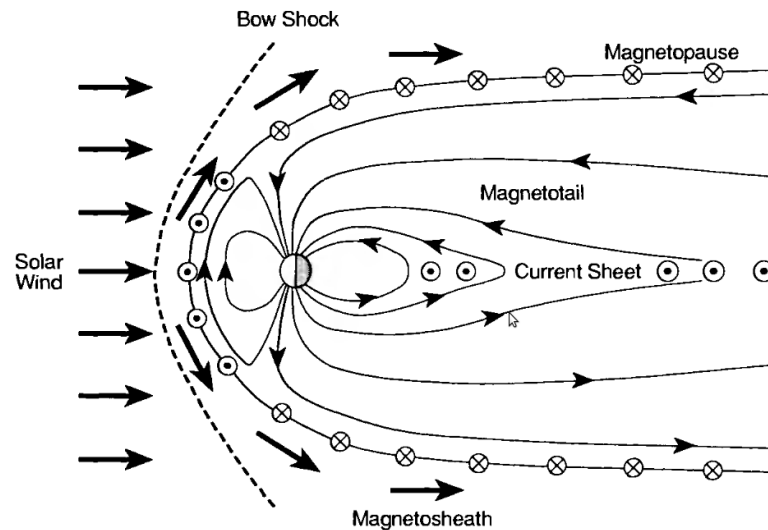
Elektrické prúdy tečúce pozdĺž magnetopauzy (rozhranie medzi magnetosférou a slnečným vetrom) sú dané prítomnosťou rozhrania medzi dvoma oblasťami s rozdielnym magnetickým poľom (dôsledok Ampérovho zákona, viď. obr. 2.6).

Elektrický prúd neutrálnej vrstvy v magnetickom chvoste má smer od východu na západ (záporný smer pri pohľade zo severu). Táto prúdová vrstva rozdeľuje magnetický chvost magnetosféry na dva laloky. V hornom (severnom) laloku nad neutrálnou vrstvou magnetické pole smeruje smerom k Zemi, v spodnom laloku to je opačne. Na bokoch magnetického chvosta sa prúdy rozdeľujú a prejdú do prúdov magnetopauzy (naznačené šípkami v pravej časti obr. 2.5). Prúd neutrálnou vrstvou je dôsledok Ampérovho zákona.

Birkelandové prúdy sú elektrické prúdy pozdĺž magnetických siločiar v magnetickom chvoste. Na rannej strane smerujú smerom k Zemi, na večernej strane smerujú opačne, smerom ku koncu magnetického chvosta. Tieto prúdy sú spôsobené zmenami v topológii magnetického chvosta. Ak tieto prúdy častíc vniknú až do ionosféry Zeme, vzniká polárna žiara. Obidve vetvy prúdu sa uzatvárajú v ionosfére. Všeobecne vzaté sú Birkelandove prúdy všetky prúdy tečúce pozdĺž magnetického poľa.



Obr. 2.5: Schéma hlavných systémov elektrických prúdov tečúcich v magnetosfére Zeme. Zobrazovaný prúd magnetopauzy (*magnetopause currents*), prstenčový prúd (*ring current*) a prúd neutrálnej vrstvy (*cross tail current sheet*). Birkelandove prúdy sú elektrické prúdy tečúce pozdĺž magnetických siločiar. Prevzaté z *Stern* (1994).



Obr. 2.6: Rez magnetosférou. V tomto modeli elektrických prúdov je celý priestor magnetického poľa Zeme ohraničený prúdovou vrstvou obtekajúcou magnetopauzu. Prúdy z neutrálnej vrstvy (*current sheet*) sa na bokoch magnetického chvosta napájajú na prúdy magnetopauzy. Prevzaté z *Hughes* (1995).

Kapitola 3

Vlny v plazme

Vlna je rozruch šíriaci sa prostredím. Pod vlnami v plazme rozumieme vlny elektrického a magnetického poľa, s nimi však úzko súvisia kmity častíc plazmy (elektróny alebo ióny — majú výrazne rozdielne hmotnosti, čo sa odrazí na charakteristických frekvenciách). Typ oscilujúcich častíc teda poskytuje jedno z možných delení v klasifikácii vln. Ďalšie delenie vln v plazme je na *elektrostatické* a *elektromagnetické* vlny podľa toho, či osciluje magnetické pole. Iné vlny môžeme očakávať v *studenej plazme* a iné pri uvažovaní *horúcej plazmy*. Je prostredie izotropné alebo anizotropné (s magnetickým poľom)? To všetko má vplyv na typ vln, ktoré sa môžu šíriť v danej plazme. Vidíme, že oproti vlnám, s ktorými máme skúsenosti z bežného života (napr. mechanické vlnenie v podobe zvuku vo vzduchu alebo svetlo vo vzduchu, prípadne vo vákuu), sú vlny šíriace sa v plazme s prípadným magnetickým poľom podstatne bohatšie, komplexnejšie a zaujímavejšie. V závislosti na rôznych podmienkach sa môžu šíriť rôznymi módmi.

Harmonickú rovinnú vlnu, v ktorej kmitá veličina \vec{B} s amplitúdou \vec{B}_0 , charakterizuje uhlová frekvencia ω a vlnový vektor \vec{k} :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \exp i(\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}_{\varphi}). \quad (3.1)$$

Za merateľnú veličinu sa považuje reálna časť výrazu. Vlnoplocha, plocha s konštantnou fázou φ , sa pohybuje *fázovou rýchlosťou*

$$\vec{v}_f = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k}. \quad (3.2)$$

Index lomu definujeme ako pomer rýchlosti svetla vo vákuu c a veľkosti fázovej rýchlosti v_f :

$$n = \frac{c}{v_f} = \frac{ck}{\omega}. \quad (3.3)$$

Fázová rýchlosť môže nadobúdať ľubovoľne vysoké hodnoty, rýchlosťou svetla c je ohraničená iba *grupová rýchlosť* \vec{v}_g , ktorou sa pohybuje tzv. vlnový balík nesúci informáciu v prípade modulovaného signálu:

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}. \quad (3.4)$$

Uhlová frekvencia a vlnový vektor sú zviazané *disperznou reláciou*

$$\omega = \omega(\vec{k}). \quad (3.5)$$

Tento vzťah popisuje vlastnosti prostredia z hľadiska šírenia vln. Z disperznej relácie je možné určiť vyššie definované parametre vlny ako fázovú a grupovú rýchlosť alebo index lomu.

Na grafe disperznej relácie si môžeme všimnúť isté limitné situácie. V prípade $v_f \rightarrow \infty$ respektíve $n \rightarrow 0$ hovoríme o *oreze* (napr. orezy R a L módov na obr. 3.3). *Rezonancia* nastáva pri $v_g \rightarrow 0$, vlna sa nešíri a jej energia sa presunula do stacionárnych oscilácií častíc plazmy. Na grafe disperznej relácie sa prejavuje ako asymptotické približovanie sa k danej frekvencii.

3.1 Typy vln v plazme, stručný prehľad

Maxwellove rovnice:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad (\text{Gaussov zákon}) \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayov zákon}) \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampérov zákon, s posuvným prúdom}) \quad (3.9)$$

Podľa lineárnej teórie (*May-Britt* (2001), *Chen* (1984)) môžeme pri uvažovaní rovinnnej vlny previesť Fourierovu transformáciu¹ (v priestore a čase), čo dosiahneme zmenami vo výrazoch podľa tabuľky 3.1.

Pôvodný operátor	nahradíme týmto
$\partial/\partial t$	$-i\omega$
∇	$i\vec{k}$
$\nabla \cdot$	$i\vec{k} \cdot$
$\nabla \times$	$i\vec{k} \times$
Δ	$-k^2$

Tabuľka 3.1: Pravidlá pre zámenu operátorov vo Fourierovej transformácii pre rovinnú vlnu v lineárnej teórii.

Veličinu popisujúcu vlnu môžeme rozložiť na zložku reprezentujúcu strednú hodnotu a na kmitajúcu zložku, napr. v prípade magnetického a elektrického poľa

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad (3.10)$$

tak, aby pre stredné hodnoty platilo $\langle \vec{B}_0 \rangle = \langle \vec{E}_0 \rangle = 0$.

3.1.1 Elektrostatické vlny

Ak magnetické pole neosciluje ($\vec{B}_1 = 0$), ide o elektrostatické vlny. Sú vyvolané narušenou rovnováhou v rozdelení náboja v inak kvazineutrálnej plazme,

¹Fourierova transformácia: $\tilde{f}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] d^3r dt$. Všeobecne: $\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx$.

čo vedie k osciláciám náboja. Faradayov zákon (3.8) (s úpravou podľa Tab. 3.1) preto vedie na $i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega\vec{B}_1 = 0$, takže fluktujúce elektrické pole je v prípade elektrostatických vln rovnobežné s vlnovým vektorom: $\vec{E}_1 \parallel \vec{k}$. Elektrostatické vlny sú pozdĺžne vlny.

Langmuirove vlny (elektrónové plazmové vlny) sú oscilácie elektrónov spôsobené úvodnou poruchou v rovnomernom rozložení elektrického náboja. Elektróny kmitajú s elektrónovou *plazmovou frekvenciou* ω_{pe} :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (3.11)$$

V prípade horúcej plazmy tepelný pohyb elektrónov nesie informáciu o poruche a tá sa šíri ako vlna. Disperzná relácia pre takúto vlnu má tvar

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{th}^2 \quad (3.12)$$

a nazýva sa Bohm-Grossovou rovnicou, viď. *May-Britt* (2001).

Iónové akustické vlny sú obdobou Langmuirových vln pre elektróny, ale tentoraz kmitajú ióny, ktoré sme v predchádzajúcom prípade považovali za nehybné. Charakteristické frekvencie budú teda podstatne nižšie. Hybnosť vlny sa prenáša pomocou coulombovských zrážok iónov. Podľa *May-Britt* (2001) má disperzná relácia tvar

$$\omega^2 = v_s^2 k^2, \quad (3.13)$$

kde $v_s^2 = (\gamma_e k_B T_e + \gamma_i k_B T_i)/m_i$ a γ_e a γ_i sú počty stupňov voľnosti pre elektróny a ióny (typicky sa uvažuje $\gamma_e = 1$ kvôli vyššej tepelnej rýchlosti elektrónov a $\gamma_i = 3$ pre ióny).

Disperzné relácie elektrónových Langmuirových vln a iónových akustických sa značne líšia. Langmuirové vlny sú takmer bez disperzie — pri rôznych vlnových dĺžkach majú takmer rovnakú frekvenciu (ω_{pe}), príspevok od tepelnej rýchlosti je malý. Grupová rýchlosť je malá. Len pri väčších veľkostiach vlnového vektora (malé vlnové dĺžky) sa grupová rýchlosť rovná termálnej rýchlosti. Oproti tomu majú iónové vlny grupovú a fázovú rýchlosť podobnú a takmer nemennú. Dôvod je ten, že pri Langmuirových vlnách sme ióny považovali za nehybné a narábali sme iba s jednozložkovou sústavou, v prípade iónových akustických vln kmitajú ióny a spolu s nimi aj elektróny, ktoré sú nimi unášané. Elektróny takto môžu elektrické pole čiastočne vyrušiť.

Langmuirove vlny a iónové akustické vlny nezahŕňajú vplyv magnetického poľa, preto musí byť magnetické pole nulové $\vec{B} = 0$ alebo rovnobežné s vlnovým vektorom $\vec{B} \parallel \vec{k}$, aby neovplyvňovalo kmity nabitých častíc.

Horné hybridné vlny sú elektrostatickými vlnami v plazme s (nemeným) magnetickým poľom \vec{B}_0 , kde elektróny kmitajú kolmo na magnetické pole, teda $\vec{k} \perp \vec{B}_0$. Keďže $\vec{k} \times \vec{E}_1 = \omega\vec{B}_1$ musí byť rovné nule, vlnový vektor musí byť rovnobežný s oscilujúcim elektrickým poľom a hovoríme teda o pozdĺžnych vlnách. Ak by magnetické pole nepôsobilo, elektróny by kmitali v smere danom elektrickým poľom ako v prípade obyčajných elektrónových plazmových oscilácií s ω_{pe} . Prítomné magnetické pole \vec{B}_0 však spôsobuje Lorentzovu silu a elektróny tak naberajú aj gyračný pohyb s frekvenciou ω_{ce} .

Výsledná disperzná relácia pre pozdĺžne elektrónové oscilácie ($\vec{k} \perp \vec{B}_0$) je (May-Britt (2001))

$$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \quad (3.14)$$

a ω_{UH} nazývame *hornou hybridnou frekvenciou*. Pri horúcej plazme (nezanedbateľné hodnoty tepelnej rýchlosti v_{th}) k disperznej relácii (3.14) pribudne na pravej strane ešte člen $+3k^2v_{th}^2$ majúci pôvod v tlaku (podobne ako v (3.12)).

Iónové cyklotrónové vlny sú elektrostatické iónové vlny (približne) kolmé k magnetickému poľu, $\vec{k} \perp \vec{B}_0$. V porovnaní s hornou hybridnou frekvenciou sa teraz pohybujeme v podstatne nižších charakteristických frekvenciách v dôsledku vyššej hmotnosti iónov oproti elektrónom. Disperzná relácia má tvar (May-Britt (2001))

$$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2v_s^2. \quad (3.15)$$

Vysvetlenie je podobné ako v predchádzajúcom prípade: v prípade kmitov paralelných s \vec{B}_0 máme frekvenciu $\omega^2 = k^2v_s^2$ podobne ako v iónových akustických vlnách (3.13), avšak kmitanie v rovine kolmej na magnetické pole pridá ešte gyračný člen.

Podmienka kolmosti \vec{k} na \vec{B}_0 sa však vyžaduje len približne, aby mierne kmity iónov v smere \vec{B}_0 umožnili voľný pohyb elektrónov a tým aj dosiahnutie podmienky tepelnej rovnováhy pre elektróny, čo bol predpoklad pre disperznú reláciu iónových akustických vln (3.13), aby sme mohli predpokladať počet stupňov voľnosti $\gamma_e = 1$.

Dolné hybridné vlny sú pre prípad presného splnenia podmienky $\vec{k} \perp \vec{B}_0$, ktorý vedie k disperznej relácii (May-Britt (2001))

$$\omega_{LH}^2 = \omega_{ce}\omega_{ci}. \quad (3.16)$$

Dolné hybridné oscilácie sú nezvyčajné v tom, že hmotnosť iónov a elektrónov má rovnako veľký vplyv, na rozdiel od predchádzajúcich prípadov. Na druhej strane sú tieto vlny zriedkavé kvôli presnej požiadavke v geometrii.

3.1.2 Elektromagnetické vlny

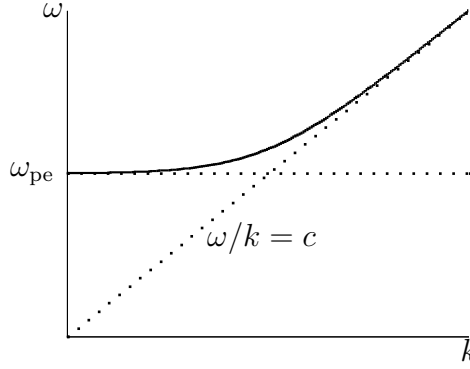
Elektromagnetické vlny sú vlny s kmitajúcim elektrickým aj magnetickým poľom. Sú to vlny vo vysokých frekvenciách, preto ióny nestíhajú reagovať na zmeny poľa a v nasledujúcom ich nebudeme brať do úvahy.

O **svetelných vlnách** hovoríme v prípade elektromagnetických vln v plazme bez magnetického poľa, teda $\vec{B}_0 = 0$ a výsledné magnetické pole tvorí iba kmitajúca zložka $\vec{B} = \vec{B}_1$. Disperzná relácia má tvar (May-Britt (2001))

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2c^2. \quad (3.17)$$

Podľa obr. 3.1 vidíme, že pri frekvenciách nad plazmovou elektrónovou frekvenciou sa vlna blíži módu voľného priestoru s fázovou a grupovou rýchlosťou rovnou rýchlosti svetla vo vákuu. Ďalej si všimnime, že pri plazmovej frekvencii ω_{pe} nastáva orez a v danom prostredí sa svetelná vlna s nižšou frekvenciou nešíri. Pre $\omega < \omega_{pe}$ dostávame podľa (3.3)

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (3.18)$$



Obr. 3.1: Disperzná relácia elektromagnetickej vlny v plazme bez magnetického poľa ($\vec{B}_0 = 0$). Pri plazmovej frekvencii ω_{pe} nastáva orez — vlna sa pod touto frekvenciou už nešíri. Zároveň nastáva rezonancia, keď je grupová rýchlosť nulová a plazma sa dostáva do oscilácie. Pri vysokom vlnovom čísle sa grupová aj fázová rýchlosť blížia rýchlosti svetla a vlna sa dostáva do módu voľného priestoru.

imaginárny index lomu. Pri zachovaní reálneho vlnového vektora dostaneme komplexnú frekvenciu, kde (v závislosti na definícii) jedna zložka predstavuje frekvenciu kmitov a druhá útlm vlny. Vlna je tlmená, plazma sa pre $\omega < \omega_{pe}$ javí ako nepriehľadná. Tento poznatok sa dá v praxi aplikovať napr. na zistenie koncentrácie elektrónov.

Nasledujúce typy elektromagnetických vln sú vlny v plazme s magnetickým poľom. Sú charakterizované orientáciou vlnového vektora vzhľadom k magnetickému poľu \vec{B}_0 a oscilujúcemu elektrickému poľu \vec{E}_1 .

Ak sa vlny šíria kolmo k nemennej zložke magnetického poľa ($\vec{k} \perp \vec{B}_0$) a požadujeme elektromagnetické vlny (prične vlnenie), kmitajúce elektrické pole musí byť kolmé k vlnovému vektoru. Ak je kmitajúce elektrické pole rovnobežné s nemenným magnetickým poľom $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$, hovoríme o **O vlnách**, resp. o *riadnom móde*. Disperzná relácia má rovnaký tvar ako v prípade svetelných vln (3.17) (*May-Britt* (2001)). Vlny v riadnom móde sa preto šíria rovnakým spôsobom ako elektromagnetické vlny v nezmagnetizovanej plazme. Vidíme, že stála zložka magnetického poľa \vec{B}_0 nemá vplyv na vlnu, ak je s fluktuujúcim elektrickým poľom \vec{E}_1 rovnobežná. Vlna je lineárne polarizovaná. Orež nastáva na plazmovej frekvencii.

Ak je kmitajúce elektrické pole kolmé k magnetickému poľu $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$, hovoríme o **X vlnách**, resp. o *mimoriadnom móde*. Vlnový vektor je kolmý na stálu zložku magnetického poľa a na magnetické pole je kolmé zároveň fluktuujúce elektrické pole. To môžeme rozložiť na zložku kolmú a zložku rovnobežnú s vlnovým vektorom (*May-Britt* (2001)) a vlnenie má teda priečnu ale aj pozdĺžnu zložku. Vlna je elipticky polarizovaná. Disperzná relácia má tvar (*May-Britt* (2001))

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)}{(\omega^2 - \omega_{UH}^2)}, \quad (3.19)$$

čo sa dá zapísať aj v tvare, z ktorého je vidieť index lomu N :

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2}. \quad (3.20)$$

Orez nastáva pri $n \rightarrow 0$, z (3.20) dostávame frekvencie pre orez:

$$\omega_{\text{R,L}}^{(\text{X})} = \pm \frac{\omega_{\text{ce}}}{2} + \sqrt{\omega_{\text{pe}}^2 + \frac{\omega_{\text{ce}}^2}{4}}. \quad (3.21)$$

Tieto dve frekvencie orezu odpovedajú pravotočivej resp. ľavotočivej (eliptickej) polarizácii. Disperzné relácie O a X vln sú zobrazené na obr. 3.2 (šírenie kolmé na \vec{B}_0 je znázornené prerušovanou čiarou).

Vlny šíriace sa paralelne s magnetickým poľom sú zaujímavé aj tým, že sa môžu pozdĺž magnetických siločiar magnetosféry dostať až na povrch Zeme. Znovu rozlišujeme dva typy—pravotočivé a ľavotočivé vlny (*May-Britt* (2001))—s disperznými reláciami

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{(1 \mp \omega_{\text{ce}}/\omega)} \quad (3.22)$$

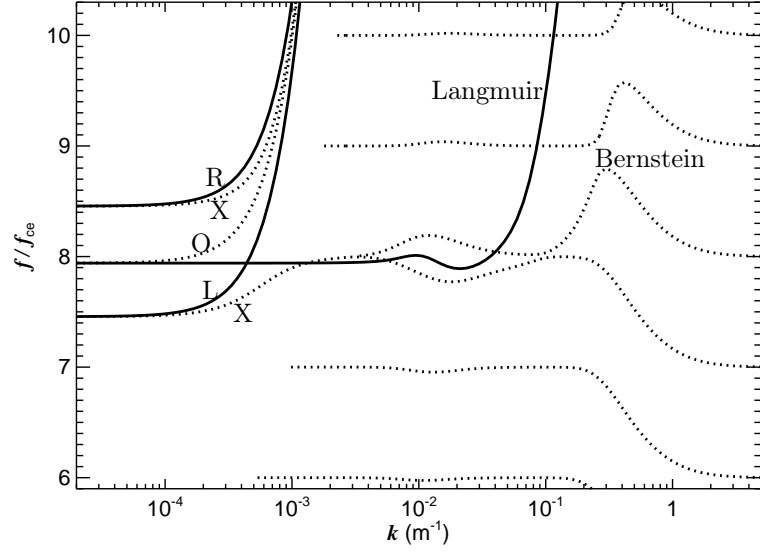
respektíve v tvare, z ktorého je zrejмый index lomu

$$N^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2/\omega^2}{(1 \mp \omega_{\text{ce}}/\omega)}. \quad (3.23)$$

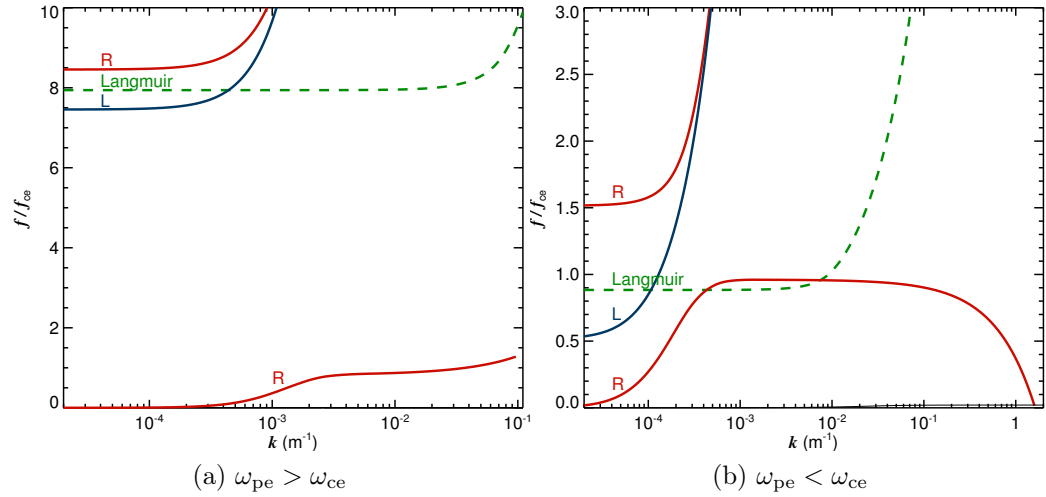
Horné z dvojice znamienok (mínus) odpovedá pravotočivému **R módu**, druhé znamienko (plus) odpovedá ľavotočivému **L módu**. Frekvencie orezu, pri ktorých prechádza index lomu do imaginárnych hodnôt, sú rovnaké ako v prípade X vln. R vlna rotuje v rovnakom smere ako obiehajú elektróny, L vlna sleduje rotáciu iónov. Tieto vlny sa preto môžu dostať do cyklotrónovej rezonancie. Vo vyšších frekvenciách môže mať (vďaka rotácii zhodnou s gyráciou elektrónov) rezonanciu iba R vlna. L vlna sa skladá z jednej vetvy, R vlna z dvoch vetiev. Tá spodná (zhora ohraničená elektrónovou cyklotrónovou frekvenciou) sa nazýva aj **hvizdovým módom** (hvizdovým módom sa napr. šíria vlny vybudené bleskovými výbojmi v atmosfére, ktoré sa kvôli disperzii podobajú hvizdom s klesajúcim tónom). Disperzné relácie R a L vln sú na obr. 3.2 a na obr. 3.3, na ktorom sú zobrazené dva rôzne prípady: (a) $\omega_{\text{pe}} > \omega_{\text{ce}}$ a (b) $\omega_{\text{pe}} < \omega_{\text{ce}}$. Hlavný rozdiel je v tom, že pri $\omega_{\text{pe}} > \omega_{\text{ce}}$ je orezová frekvencia L módu ω_{L} nad elektrónovou cyklotrónovou frekvenciou, v prípade $\omega_{\text{pe}} < \omega_{\text{ce}}$ je zasa menšia ako ω_{ce} . Na obr. 3.2 je prípad $\omega_{\text{pe}} > \omega_{\text{ce}}$. L vlna sa šíri s frekvenciami vyššími ako orezová frekvencia pre L vlnu (ω_{L}), R vlna sa šíri vo všetkých frekvenciách okrem frekvencií v rozsahu ω_{ce} až ω_{R} (viď. obr. 3.3).

Alfvénové vlny a magnetozvukové vlny sú nízkofrekvenčné vlny popísané teóriou magnetohydrodynamiky (MHD). Alfvénové vlny sú priečne vlny oscilácií iónov a magnetického poľa šíriace sa pozdĺž magnetického poľa. Ich disperzná relácia je

$$\omega^2 = k^2 v_{\text{A}}^2, \quad v_{\text{A}} = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}, \quad (3.24)$$



Obr. 3.2: Príklad disperznej relácie pre dva špeciálne prípady smeru šírenia vlny—paralelné šírenie $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ (plná čiara) a kolmé šírenie $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ (prerušovaná čiara). Paralelne s magnetickým poľom sa šíria R a L vlny, ktoré sú zdola ohraničené orezom. Paralelné šírenie majú aj elektrostatické Langmuirove vlny. Vlny s kolmým šírením sú dva mimoriadne módy X a jeden riadny O mód a elektrostatické Bernsteinove módy.



Obr. 3.3: Disperzná relácia pre paralelné šírenie pre (a) $\omega_{pe} > \omega_{ce}$ a (b) $\omega_{pe} < \omega_{ce}$. Zobrazené sú elektromagnetické R a L módy a elektrostatické elektrónové Langmuirové oscilácie. Pravotočivý R mód má dve vetvy, spodná vetva odpovedá hvizdovému módu. Disperzné relácie odpovedajú plazme s jednou zložkou elektrónov s teplotou 10 eV, $f_{ce} = 7,94$ kHz a (a) $f_{pe} = 7,94 f_{ce}$ resp. (b) $f_{pe} = 0,88 f_{ce}$.

kde ρ_0 je celková koncentrácia nabitých častíc v prostredí.

Magnetozvukové vlny sú zasa pozdĺžne vlny iónových oscilácií, ktoré sa šíria kolmo na stacionárne magnetické pole \vec{B}_0 . Šíria sa podľa disperznej relácie

$$\omega^2 = c^2 k^2 \frac{(v_s^2 + v_A^2)}{(c^2 + v_A^2)}, \quad (3.25)$$

kde v_A je Alfvénova rýchlosť z (3.24) a v_s je fázová rýchlosť iónových akustických vln z (3.13). Pri slabom magnetickom poli prechádzajú magnetozvukové vlny v iónové akustické vlny a v limite nízkej teploty zasa prechádzajú v Alfvénove vlny.

Alfvénové a magnetozvukové vlny sú bez disperzie (*May-Britt* (2001)).

Všetky spomenuté typy vln sú zhrnuté v tab. 3.2.

3.2 Elektrostatické vlny v horúcej plazme bez magnetického poľa

V tejto časti sa budeme zaoberať elektrostatickými vlnami s malou amplitúdou v horúcej plazme bez magnetického poľa. Najprv podľa prístupu Vlasova a potom podľa Landaua, ktorého prístup vyrieši aj nedostatky v postupe Vlasova. Uvádzané postupy podľa *Gurnett and Bhattacharjee* (2005). Vychádzať budeme z *Vlasovovej rovnice* (3.26), ktorá súvisí s Liouvillovým teorémom a je vlastne Boltzmanovou rovnicou bez pravej strany (bezzrážková Boltzmanova rovnica), a z *Poissonovej rovnice* (3.27).

Elektrostatické vlny sú oscilácie náboja v plazme spôsobené počiatočnou poruchou. Vyžadujú iba elektrické pole, magnetické pole neosciluje. Z Faradayovho zákona (3.8) vyplýva, že elektrostatické vlny sú pozdĺžne.

3.2.1 Prístup podľa Vlasova

Budeme riešiť sústavu Vlasovovej rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \Phi \cdot \nabla_{\vec{v}} f = 0 \quad (3.26)$$

a Poissonovej rovnice

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(n_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f d^3 v \right). \quad (3.27)$$

Ióny považujeme za nepohyblivé, elektróny sú horúce. n_0 je koncentrácia iónov a elektrónov a $f(\vec{v})$ je elektrónová rýchlostná distribučná funkcia (hustota pravdepodobnosti), pre ktorú platí $n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{v}) d^3 v$. Elektrické pole \vec{E} získame z potenciálu Φ pomocou $\vec{E} = -\nabla \Phi$.

Uvedené rovnice chceme linearizovať, a preto rýchlostnú distribučnú funkciu elektrónov $f(\vec{v})$ rozložíme na súčet konštantnej distribučnej funkcie nulého rádu $f_0(\vec{v})$ a malej poruchy prvého rádu $f_1(\vec{v})$:

$$f(\vec{v}) = f_0(\vec{v}) + f_1(\vec{v}). \quad (3.28)$$

Vlna	Podmienky	Disperzná relácia	Rov.
<i>Elektrostatické vlny, elektrónové</i>			
Langmuirové vlny (plazmové oscilácie)	$\vec{B}_0 = 0$ alebo $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{th}^2$	(3.12)
Horné hybridné vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\omega_{UH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2$	(3.14)
<i>Elektrostatické vlny, iónové</i>			
Iónové akustické vlny	$\vec{B}_0 = 0$ alebo $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = k^2 v_s^2$	(3.13)
Iónové cyklotrónové vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ približne	$\omega^2 = \omega_{ci}^2 + k^2 v_s^2$	(3.15)
Spodné hybridné vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ presne	$\omega_{LH}^2 = \omega_{ci} \omega_{ce}$	(3.16)
<i>Elektromagnetické vlny, elektrónové</i>			
Svetelné vlny	$\vec{B}_0 = 0$	$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2$	(3.17)
O-vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$, $\vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2$	(3.17)
X-vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$, $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)}{(\omega^2 - \omega_h^2)}$	(3.19)
R-vlny (hvizdový mód)	$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{(1 - \omega_{ce}/\omega)}$	(3.22)
L-vlny	$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{(1 + \omega_{ce}/\omega)}$	(3.22)
<i>Elektromagnetické vlny, iónové</i>			
Alfvénove vlny	$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = k^2 v_A^2$	(3.24)
Magnetozvukové vlny	$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = c^2 k^2 \frac{(v_s^2 + v_A^2)}{(c^2 + v_A^2)}$	(3.25)

Tabuľka 3.2: Typy vln v plazme — základný prehľad s aproximovanými disperznými reláciami. Podľa *May-Britt* (2001).

Podobne platí $\phi = \phi_1$. Dosadením do Vlasovovej a Poissonovej rovnice dostaneme

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_1 + \frac{e}{m} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla_{\vec{v}} f_0 = 0 \quad (3.29)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\vec{v}) d^3 v. \quad (3.30)$$

V nasledujúcom kvôli jednoduchosti vypustíme u veličín f_1 a Φ_1 dolné indexy, čiže pod symbolmi f a Φ budeme rozumieť perturbácie prvého rádu zavedené pri linearizácii. Žiaden smer nie je privilegovaný, preto orientujeme os z v smere \vec{k} .

Na rovnice (3.29) a (3.30) aplikujeme Fourierovu transformáciu (podľa tabuľky 3.1). Z takto upravenej Vlasovovej rovnice vyjadríme Fourierov obraz distribučnej funkcie a tú dosadíme do Poissonovej rovnice po Fourierovej transformácii, čím získame homogénnu rovnicu

$$\left[1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 m k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{v_z - \omega/k} d^3 v \right] \tilde{\Phi} = 0, \quad (3.31)$$

kde $\tilde{\Phi}$ je Fourierov obraz Φ . Hľadáme netriviálne riešenie potenciálu, preto člen v zátvorke musí byť rovný nule. Pomocou neho definujeme disperznú reláciu:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 m k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_0 / \partial v_z}{v_z - \omega/k} d^3 v = 0. \quad (3.32)$$

Po zavedení normovanej jednorozmernej distribučnej funkcie $F_0(v)$ (redukovaná distribučná funkcia) pomocou preintegrovania cez zvyšné dva rozmery a normovaním pomocou koncentrácie n_0 na bezrozmernú veličinu

$$F_0(v_z) = \frac{1}{n_0} \iint_{-\infty}^{\infty} f_0(\vec{v}) dv_x dv_y, \quad (3.33)$$

po integrovaní per-partes ($F_0 \rightarrow 0$ pre $v_z \rightarrow \pm\infty$) a po použití $\omega_{pe}^2 = n_0 e^2 / \epsilon_0 m$ (3.11) získame disperznú reláciu vo vhodnejšom tvare:

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0}{(v_z - \omega/k)^2} dv_z = 0. \quad (3.34)$$

Náboj je v tejto rovnici obsiahnutý v druhej mocnine (v ω_{pe}^2), a preto je možné rovnicu zovšeobecniť nielen o ióny, ale o ľubovoľný počet častíc:

$$D(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{s0}}{(v_z - \omega/k)^2} dv_z = 0, \quad (3.35)$$

kde ω_{ps} a F_{s0} sú plazmová frekvencia a redukovaná distribučná funkcia príslušajúce zložke častíc s .

Integrál v hore definovanej disperznej relácii diverguje pre $v_z = \omega/k$, ak pre distribučnú funkciu neplatí $F_0(v_z) = \partial F_0(v_z) / \partial v_z = 0$ pre $v_z = \omega/k$. Inými slovami, v súbore častíc nesmieme mať častice pohybujúce sa rýchlosťou rovnou fázovej rýchlosti vlny. Toto obmedzenie bude vyriešené v Landauovom prístupe.

3.2.2 Prístup podľa Landaua

V Landauovom prístupe, podobne ako vo Vlasovovom, uvažujeme vlny s nízkou amplitúdou v plazme horúcich elektrónov a nepohyblivých iónov. Rozdiel spočíva v tom, že na Vlasovovu a Poissonovu rovnicu (3.26 a 3.27) aplikujeme Fourierovu transformáciu v priestore a Laplaceovu transformáciu v čase². Opäť ako v predchádzajúcom prípade, z Vlasovovej transformovanej rovnice dosadíme distribučnú funkciu do Laplaceovej transformovanej rovnice, z čoho je potom možné vyjadriť potenciál v tvare podielu:

$$\tilde{\Phi} = \frac{N(k, p)}{D(k, p)}, \quad (3.36)$$

kde

$$N(k, p) = i \frac{en_0}{\epsilon_0 k^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(0)}{v_z - ip/k} dv_z \quad (3.37)$$

a

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial v_z}{v_z - ip/k} dv_z. \quad (3.38)$$

$F(0)$ je redukovaná distribučná funkcia podľa (3.33) v čase $t = 0$.

Všimnime si podobnosť $D(k, p)$ (3.38) s distribučnou funkciou $D(k, \omega)$ vo Vlasovovom prístupe (3.32 s prihliadnutím na 3.33). Ide o rovnaké funkcie s tým, že ω je zamenená za ip .

Teraz je potrebné vykonať spätnú Laplaceovú transformáciu³ potenciálu $\tilde{\Phi}(k, p)$, aby sme získali jeho časovú závislosť $\Phi(k, t)$. Aby sa na výpočet krivkového integrálu v komplexnej rovine mohla použiť veta o reziduách, je okrem iného potrebné analyticky rozšíriť funkciu aj na ľavú polrovinu komplexnej roviny. Avšak funkcie $N(k, p)$ a $D(k, p)$ (3.37) a (3.38) majú nespojitosť v $\Re p = 0$. Tento problém úzko súvisí s nedostatkom Fourierovej transformácie vo Vlasovovom prístupe, kde pri $v_z = \omega/k$ dochádzalo k singularite. Landau analytické rozšírenie na ľavú komplexnú polrovinu vyriešil pomocou zmeny integrálov (3.37) a (3.38) na integrály v komplexnej rovine, pričom integračnú krivku upravil tak, aby bola stále pod pólom $v_z = ip/k$:

$$D(k, p) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_C \frac{\partial F_0 / \partial v_z}{v_z - ip/k} dv_z. \quad (3.39)$$

Jedinou zmenou oproti (3.38) je to, že integrál je v komplexnom priestore v_z pozdĺž krivky C . Pre $\Re p > 0$ vedie krivka C pozdĺž osi $\Im v_z = 0$ od $v_z = -\infty$ do $v_z = \infty$. Pre $\Re p < 0$ sa pól $v_z = ip/k$ presunie pod os $\Im v_z = 0$ a na krivke C pribudne „obchádzka“ okolo pólu, aby krivka C ostala stále pod pólom (čo sa pri výpočte integrálu prejaví reziduom).

Konečne časovú závislosť $\Phi(k, t)$ vypočítame spätnou Laplaceovou transformáciou (3.36) pomocou reziduovej vety. Čitateľ v zlomku (3.36) nemá póly (vyžadujeme, aby $F(0)$ bola analytická funkcia), preto má (3.36) póly

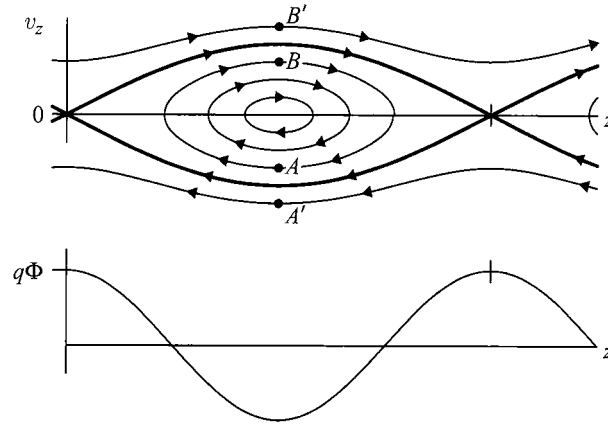
²Laplaceova transformácia: $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt$, $f(t)$ je definované pre $t \geq 0$, kde je kvôli konzistencii s označením premenných vo Fourierovej transformácii p definované ako $p = \gamma - i\omega$.

³Spätná Laplaceova transformácia: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} dp$, kde $\sigma = \Re p$ je v Gaussovej rovine napravo od všetkých pólov $\tilde{f}(p)$.

pre $D(k, p) = 0$, čo dáva disperznú reláciu (3.34) z Fourierovej analýzy Vlasovovho prístupu, akurát p je komplexné a platí $p = \gamma - i\omega$. Hľadanie komplexných koreňov p v $D(k, p)$ teda vedie k osciláciám v časovej závislosti s exponenciálnym rastom alebo tlmením daným veličinou γ .

3.2.3 Landauovo tlmenie

Landau v roku 1946 (*Landau (1946)*) na základe matematického poustupu ukázal, že Langmuirove vlny sú tlmené ⁴, pričom vlnenie svoju energiu odovzdáva časticiam. Toto zistenie bolo pre bezzrážkovú plazmu prekvapujúce. Na rozdiel od rovníc pre zrážkovú plazmu sú Vlasovove a Poissonove rovnice časovo reverzibilné, predpokladajú však ireverzibilné chovanie (*Mouhot and Villani (2010)*).



Obr. 3.4: Trajektórie vo fázovom priestore (horný graf) pre častice v sinusoidálnom potenciálovom poli (dolný graf) v súradnicovej sústave pohybujúcej sa fázovou rýchlosťou ω/k . Častice vnútri hrubšej krivky sú uväznené v potenciálovej jame; častice mimo oblasť ohraňujúcu hrubšiu krivku nie sú zachytené a pohybujú sa pozdĺž šírenia vlny. Obrázok prevzatý z *Gurnett and Bhattacharjee (2005)*.

Landauovo tlmenie súvisí s interakciou elektrostatickej vlny s časticami, ktorých rýchlosť je blízka fázovej rýchlosti vlny ω/k . Pre kvalitatívne popísanie tohto deja je vhodné prejsť do súradnicovej sústavy pohybujúcej sa fázovou rýchlosťou. Zároveň predpokladáme, že rýchlosť rastu vlny je malá, teda $|\gamma| \ll |\omega|$. Vo zvolenej súradnicovej sústave preto môžeme považovať potenciál vlny za stacionárny. V elektrostatickom potenciáli tvaru $\Phi(z) = \Phi_0 \cos kz$ budú častice vykonávať pohyb, ktorý bude odpovedať trajektóriám vo fázovom priestore na obr. 3.4. Uzatvorené trajektórie (napr. častice v bodoch A a B) odpovedajú uväzneným časticiam. Smerom von od hrubej krivky sú nezachytené častice (na obr. častice A' a B'). Častice uväznené v potenciálovej jame s rôznou energiou oscilujú s rôznou frekvenciou ($\omega_b = k\sqrt{q\Phi_0/m}$), čím sa navzájom dostávajú mimo fázu (pri vyšších energiách je potenciálova

⁴Síce z matematického pohľadu nie úplne rigorózne, ale formálne správne, na rozdiel od predchádzajúcich prác jeho súčasníkov, ako Landau neskromne podotkol (*Mouhot and Villani (2010)*).

jama širšia a frekvencia kmitov nižšia). Toto miešanie fázy je zodpovedné za disipáciu a Landauovo tlmenie.

Sledujeme kinetickú energiu častíc a energiu elektrostatickej vlny. Celková energia systému musí ostať konštantná. Preto ak častice získajú kinetickú energiu, energia poľa musí klesnúť. Ako sa zmení energia častíc v prítomnosti vlny závisí na rýchlostnej distribúcii $F_0(v_z)$ a konkrétne, ako neskôr uvidíme, na jej derivácii $\partial F_0(v_z)/\partial v_z$ v bode fázovej rýchlosti vlny $v_z = \omega/k > 0$. Ak je táto derivácia záporná, tak počet častíc, ktoré sa pôvodne pohybovali pomalšie ako fázovou rýchlosťou vlny (častice A a A' na obr. 3.4), je vyšší ako počet častíc, ktoré sa pôvodne pohybovali rýchlejšie ako je fázová rýchlosť vlny (na obr. 3.4 častice v bodoch B a B'). Kinetická energia častíc v súradnicovej sústave plazmy je úmerná $(\omega/k + v_z)^2$. Z obrázku 3.4 je vidieť, že časticiam A a A' kinetická energia vzrastie a naopak, časticiam B a B' ich kinetická energia klesne. Keďže častíc A a A' je viac ako častíc B a B' , je zrejmé, že v konečnom dôsledku kinetická energia častíc vzrastie. Vlna preto energiu stráca a je tlmená.

Je nutné poznamenať, že Landauovo tlmenie je možné rozdeliť na lineárne a nelineárne procesy. V prípade použitia linearizácie vo Vlasovovej a Poissonovej rovnici môžeme popísať iba lineárnu fázu Landauovho tlmenia. Z podmienky linearity vyplýva požiadavka

$$|\partial f / \partial v_z| \ll |\partial f_0 / \partial v_z|, \quad (3.40)$$

(f je perturbácia prvého rádu distribučnej funkcie) a ďalej podľa *Gurnett and Bhattacharjee* (2005) platí $\partial f / \partial v_z = -ikf(0)t \exp(-ikv_z t)$, teda $\partial f / \partial v_z$ s časom exponenciálne rastie, takže podmienka (3.40) bude napokon porušená bez ohľadu na to, ako veľmi malá bola počiatočná perturbácia $f(0)$ (f v čase $t = 0$).

Pre dostatočne malú amplitúdu vlny Φ_0 je perióda oscilácií častíc zachytených v potenciálových jamách podstatne nižšia ako perióda kmitov poľa, preto počas úvodnej fázy efekt zachytených častíc nie je podstatný, pretože tie nestihli vykonať ani zlomok obehu. Práve počas tejto úvodnej fázy platí lineárna fáza Landauovho tlmenia. Podmienka časovej platnosti lineárnej fázy je preto $0 < t \ll \omega_b^{-1} = 1 / (k\sqrt{q\Phi_0/m})$.

Aproximácia pomalého rastu (Weak growth rate approximation). Za platnosti podmienky $|\gamma| \ll |\omega|$, teda aproximácie pomalého rastu, môžeme získať vzťah pre mieru útlmu (rastu) γ . Disperznú reláciu $D(k, p)$ rozvinieme do Taylorovho radu okolo bodu $p = -i\omega$:

$$D(k, p) = D(k, -i\omega) + i \left(\frac{\partial D(k, -i\omega)}{\partial \omega} \right) \gamma = 0. \quad (3.41)$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí výrazov (imaginárnu zložku $\partial D / \partial \omega$ zanedbáme) nakoniec môžeme získať (*Gurnett and Bhattacharjee* (2005))

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega}, \quad (3.42)$$

kde D_i a D_r sú imaginárna a reálna časť D , pre ktoré je možné ukázať, že platí

$$D_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_0 / \partial v_z}{v_z - \omega/k} dv_z \quad (3.43)$$

a

$$D_i = -\pi \frac{k}{|k|} \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k}. \quad (3.44)$$

P predstavuje hlavnú hodnotu integrálu⁵. D_r má rovnaký tvar ako disperzná relácia získaná v prístupe Vlasovova pomocou Fourierovej analýzy, tu však máme hlavnú hodnotu integrálu, ktorou sa vyhneme divergencii integrálu pri $v_z = \omega/k$. Pre mieru rastu preto platí

$$\gamma = \pi \frac{k}{|k|} \frac{\omega_p^2}{k^2 \partial D_r / \partial \omega} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k}. \quad (3.45)$$

Vidíme, že miera rastu γ je úmerná sklonu redukovanej distribučnej funkcie v bode fázovej rýchlosti vlny. V limite veľkej fázovej rýchlosti je reálna časť disperznej relácie daná ako $D_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \langle v_z^2 \rangle)$ môžeme napísať približný vzťah

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{k}{|k|} \frac{\omega_p^3}{k^2} \frac{\partial F_0}{\partial v_z} \Big|_{v_z=\omega/k}. \quad (3.46)$$

Vidíme, že pre rýchlostné rozdelenia podobnému Maxwellovmu (s jedným maximom v $v_z = 0$) je miera rastu stále záporná $\gamma < 0$, vlna je teda tlmená.

V prípade Maxwellovho rýchlostného rozdelenia pre uhlovú frekvenciu a rast vlny dostaneme (*Gurnett and Bhattacharjee* (2005))

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3 \left(\frac{\kappa T}{m} \right)^2 \quad (3.47)$$

a

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{|k \lambda_D|^3} \exp \left(-\frac{1}{2(k \lambda_D)^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (3.48)$$

3.3 Vlny v horúcej plazme v magnetickom poli

V tejto časti sa budeme zaoberať šírením vln s malou amplitúdou v horúcej plazme v magnetickom poli. Pohyb častíc v prvom priblížení pozostáva z kruhových dráh, takže rezonanciu budeme očakávať pri frekvencii rovnej cyklotrónovej frekvencii, podobne ako v prípade studenej plazmy. Horúca plazma má túto frekvenciu dopplerovsky posunutú (paralelná rýchlosť) a kvôli tepelnému rozptylu v rýchlostnej distribúcii nie je táto rezonancia ostrá. Matematický popis je ešte zložitejší ako v predchádzajúcej časti, a preto teraz ešte viac obmedzíme medzikroky pri odvodzovaní vzťahov podľa *Gurnett and Bhattacharjee* (2005).

Znovu sa uberieme cestou linearizácie Vlasovovej rovnice a budeme predpokladať, že veličiny sú súčtom konštantných zložiek (nultého rádu) a malých perturbácií (prvého rádu). Rýchlostnú distribučnú funkciu $f_s(\vec{v})$ (pre častice s) rozložíme na

$$f_s(\vec{v}) = f_{s0}(\vec{v}) + f_{s1}(\vec{v}), \quad (3.49)$$

⁵ $P \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0-\delta} \dots dx + \int_{x_0+\delta}^{\infty} \dots dx \right]$

magnetické pole rozložíme na

$$\vec{B} = B_0 + B_1 \quad (3.50)$$

a u elektrického poľa zvolíme člen nultého rádu rovný nule $\vec{E}_0 = 0$, keďže ak sa nejedná o silné elektrické polia, môžeme sa presunúť do vzťažnej sústavy, v ktorej bude zložka nultého rádu rovná nule. Ak vynecháme dolné indexy u členov prvého rádu, Vlasovova rovnica v nultom a prvom ráde bude pozostávať z

$$\vec{v} \times \vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla}_v f_{s0} = 0 \quad (3.51)$$

a

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f_s + \frac{e_s}{m_s} (\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{\nabla}_v f_s + \frac{e_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v f_{s0} = 0. \quad (3.52)$$

Po prechode do cylindrických súradníc si je možné všimnúť, že prvá rovnica reprezentuje tzv. gyrotropnú podmienku, teda $\partial f_{s0} / \partial \phi = 0$, teda že distribučná funkcia v nultom ráde je vzhľadom k magnetickému poľu azimutálne symetrická. Ako zdôrazňujú *Gurnett and Bhattacharjee* (2005), táto podmienka platí iba pri absencii $\vec{E}_0 \times \vec{B}_0$ driftu, teda keď $\vec{E}_0 = 0$.

Pokračovať budeme úpravou Vlasovovej rovnice v prvom ráde (3.52). Najprv prejdeme do cylindrických súradníc, potom sa aplikovaním Fourierovej transformácie dostaneme do premenných k a ω podľa tabuľky 3.1 a napokon sa pomocou Faradayovho zákona (3.8) zbavíme magnetického poľa v prospech elektrického poľa. Nedávno spomenutá gyrotropná podmienka nám umožňuje popísať vlnový vektor \vec{k} iba pomocou kolmej (k_\perp) a rovnobežnej zložky (k_\parallel), keďže ho môžeme bez újmy umiestniť do roviny x, z (teda platí $\vec{k} \cdot \vec{v} = k_\parallel v_\parallel + k_\perp v_\perp \cos \phi$). Po týchto úpravách a po zavedení substitúcie

$$\omega_{cs} = \frac{e_s B_0}{m_s} \quad (3.53)$$

získame túto verziu Vlasovovej rovnice:

$$\frac{\partial \tilde{f}_s}{\partial \phi} - i(\alpha_s + \beta_s \cos \phi) \tilde{f}_s = \frac{e_s}{m_s \omega_{cs}} \left[\vec{E} + \vec{v} \times \left(\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \right) \right] \cdot \vec{\nabla}_v f_{s0}, \quad (3.54)$$

kde

$$\alpha_s = \frac{k_\parallel v_\parallel - \omega}{\omega_{cs}} \quad \text{a} \quad \beta_s = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{cs}}. \quad (3.55)$$

Všimnime si, že veličina β_s (pre daný druh častíc) je súčin Larmorovho polomeru v_\perp / ω_c a kolmej zložky vlnového vektora k_\perp .

Rovnica (3.54) nám umožňuje získať distribučnú funkciu v prvom ráde f_s pre dané elektrické pole prvého rádu \vec{E} . A to v ďalšom aj využijeme.

3.3.1 Elektrostatické vlny

Pre ich relatívnu jednoduchosť oproti elektromagnetickým vlnám sa tradične najprv pozrieme na riešenie elektrostatických vln. Elektrické pole je v prípade

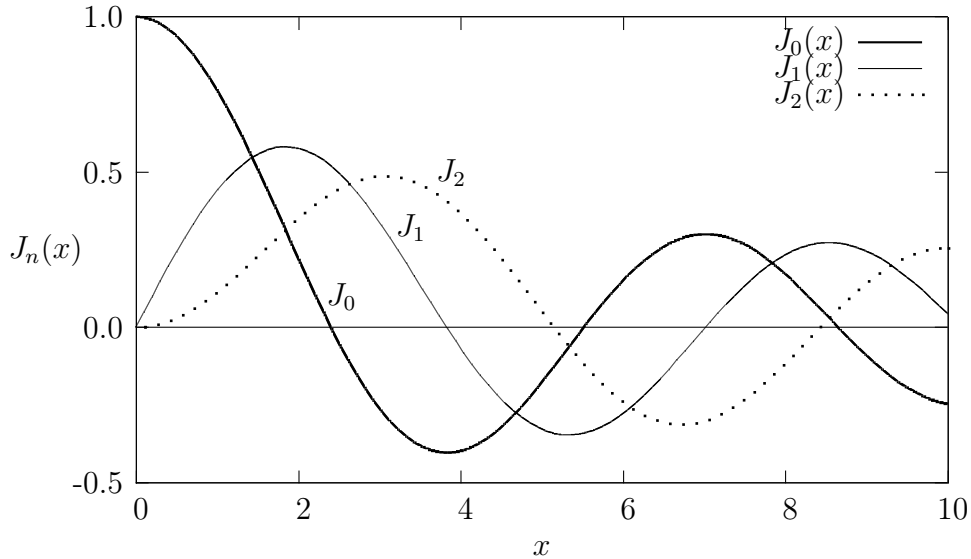
elektrostatických vln možné vyjadriť ako gradient elektrostatického potenciálu $\vec{E} = -\nabla\Phi$, čo sa po Fourierovej transformácii zmení na $\vec{E} = -i\vec{k}\tilde{\Phi}$. S využitím Faradayovho zákona (3.8), konkrétne $\vec{k} \times \vec{E} = 0$, sa rovnica (3.54) zjednoduší. Túto lineárnu diferenciálnu rovnicu pre \tilde{f}_s vyriešime (stále podľa *Gurnett and Bhattacharjee* (2005)) a pridaním Poissonovej rovnice $\nabla^2\Phi = -\rho_q/\epsilon_0$ (ρ_q je objemová hustota náboja, ktorú získame z distribučnej funkcie integráciou cez rýchlostný priestor) sa zbavíme potenciálu Φ a distribučnej funkcie prvého rádu f_s , čím získame disperznú reláciu $D(k, \omega) = 0$. Aplikovaním zopár kozmetických úprav (cylindrické súradnice, integrovanie atď.) a zavedením substitúcie

$$\omega_{ps}^2 = \frac{e_s^2 n_s}{\epsilon_0 m_s} \quad (3.56)$$

získame *Harrisovu disperznú reláciu*

$$D(k, \omega) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{cs})}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_{cs}} \left(k_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{\perp}} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\perp}} \right) \cdot 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = 0. \quad (3.57)$$

Použili sme Jacobi-Angerovu expanziu $\exp(-i\beta_s \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_s) \exp(-in\phi)$, kde $J_n(\beta_s)$ je Besselova funkcia n -tého rádu (prvého druhu)⁶. Prítomnosť Besselových funkcií nám umožní získať disperznú reláciu len numerickými metódami.



Obr. 3.5: Besselove funkcie prvého druhu $J_0(x)$, $J_1(x)$ a $J_2(x)$.

Všimnime si, že sa v Harrisovej disperznej relácii (3.57) objavujú harmonické cyklotrónovej frekvencie $n\omega_{cs}$. Pôvod majú v spomenutej Jacobi-

⁶Besselove funkcie prvého druhu sú definované ako riešenia $J_{\alpha}(x)$ Besselovej diferenciálnej rovnice $J_{\alpha}''x^2 + J_{\alpha}'x + (x^2 - \alpha^2)J_{\alpha} = 0$, ktoré majú v nule konečnú hodnotu. Jedna z definícií Besselových funkcií pre celočíselné n je $J_n(x) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i(n\tau - x \sin \tau)) d\tau$. Graf na obr. 3.5

Angerovej expanzii, ktorou sme nahradili exponenciálnu funkciu s argumentom $-i\beta_s \sin \phi$ počas odvodzovania Harrisovej rovnice. To je zdrojom rezonancie pri harmonických frekvenciách $n\omega_{cs}$. K rezonancii dochádza kvôli fázovému rozdielu medzi elektrickým poľom a cyklotrónovým pohybom častíc. Ak častica vykonáva cyklotrónový pohyb $x = \rho \sin \omega_c t$ a elektrické pole má tvar $E(x, t) = E_0 \exp i(k_\perp x - \omega t)$, výsledné pole, ktoré bude „cítiť“ častica, bude

$$E(t) = E_0 e^{i\beta_s \sin \omega_c t} e^{-i\omega t} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_s) e^{i(n\omega_c - \omega)t}.$$

Elektrické pole sme teda rozložili pomocou vyšších harmonických frekvencie ω_c a koeficientmi v tejto expanzii je Besselova funkcia. Rezonancia nastáva, ak vymizne fázový rozdiel medzi pohybom častice a elektrickým poľom, ktoré častica cíti, teda keď $\omega \approx n\omega_c$.

Zvláštnu pozornosť si medzi elektrostatickými vlnami zasluhujú tzv. *Bernsteinove módy*, ktoré nastávajú pri kolmom šírení vln vzhľadom k magnetickému poľu, teda $k_\parallel = 0$. Za predpokladu izotropnej Maxwellovej rýchlostnej distribučnej funkcie a prítomnosti iba dvoch druhov častíc – elektrónov a nepohyblivých iónov, je možné z Harrisovej disperznej relácie (3.57) odvodiť disperznú reláciu Bernsteinových módov. Aplikovaním týchto podmienok a matematickej identity⁷ získame disperznú reláciu Bernsteinových módov (*Bernstein* (1958))

$$D(k_\perp, \omega) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega_p^2}{\beta_c^2 \omega_c^2} \frac{\Gamma_n(\beta_c)}{(\omega/n\omega_c)^2 - 1} = 0 \quad (3.58)$$

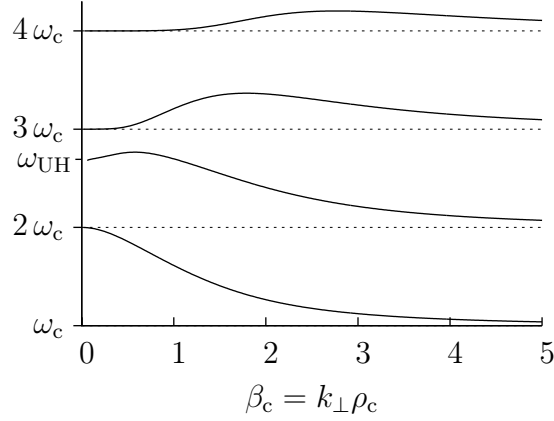
s nasledujúcimi definíciami veličín

$$\Gamma_n(\beta_c) = \exp(-\beta_c^2) I_n(\beta_c^2) \quad \text{a} \quad \beta_c = k_\perp \frac{\sqrt{k_B T/m}}{\omega_c}. \quad (3.59)$$

Disperzna relácia Bernsteinových módov pre $\omega_p = 2,5\omega_c$ je na obr. 3.6. Nad cyklotrónovou elektrónovou frekvenciou ω_c sa v pásme medzi každými dvoma harmonickými ω_c nachádza jedna vetva disperznej relácie. Medzi druhou a tretou harmonickou sa nachádza horná hybridná frekvencia $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$ (3.14) a v tomto pásme sa frekvencia k tejto hodnote blíži s $\beta_c = k_\perp \rho_c \rightarrow 0$ (aproximácia pre nízku teplotu a veľkú vlnovú dĺžku). V tejto oblasti sa mení charakter vetiev medzi jednotlivými harmonickými — jednotlivé vetvy pod ω_{UH} zahŕňajú v danom pásme všetky frekvencie a vetvy nad ω_{UH} majú maximum, ktoré je stále nižšie a nižšie, frekvencie sú teda v stále užšom pásme.

Prítomnosť elektrostatických vln v okolí harmonických frekvencií ω_c je na rozdiel od teórie studenej plazmy nový fenomén. Vlny šíriace sa presne kolmo na magnetické pole nie sú tlmené, pretože rezonančná frekvencia je nekonečná, a teda žiadne častice sa s vlnou do rezonancie nedostanú. Vlny už aj mierne vychýlené od kolmého smeru tlmené budú.

⁷ $\int_0^\infty J_n^2(au) \exp(-a^2 u) u du = 1/2 \exp(-a^2/2) I_n(a^2/2)$, I_n je modifikovaná Besselova funkcia, ktorá je Besselovou funkciou s rýdzo imaginárnym argumentom, def.: $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+|n|)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+|n|}$.



Obr. 3.6: Bernsteinove módy v grafe disperznej relácie pre prípad $\omega_p = 2,5 \omega_c$. Horná hybridná frekvencia ω_{UH} sa nachádza medzi druhou a treťou harmonickou ω_c .

Pozrime sa teraz na **nestability**, ktoré môžu nastať pri elektrostatických vlnách v zmagnetizovanej plazme. Jedným z typov nestabilit sú nestability spôsobené **anizotropiou** (distribučnej funkcie), druhým typom sú nestability spôsobené **elektrickými prúdmi**.

Príklad nestability spôsobenej **anizotropiou** nájdeme v systéme elektrónov s prstencovou distribučnou funkciou (danou delta funkciou s polohou v rýchlostnom priestore $v_{\parallel} = 0$ a $v_{\perp} = V \neq 0$ a s druhou delta funkciou s $v_{\perp} = -V$, aby nevznikol prúd). Pri istých parametroch sa v riešení Harrisovej disperznej relácie (pre tento typ distribučnej funkcie) objavujú komplexné páry koreňov (v každom páre jeden nestabilný). Táto nestabilita však nie je spôsobená rezonanciou.

Typom nestability spôsobenej rezonanciou a anizotropiou je nestabilita objavujúca sa v distribučných funkciách so stratovým kužeľom, ktorá je podobná Bernsteinovým módom. Prevedením Harrisovej relácie (3.57) do Landauovho formalizmu a rozložením disperznej relácie na reálnu a imaginárnu zložku $D = D_r + iD_i$ a za použitia vzťahu pre nárast (tzv. aproximácia pomalého rastu spomenutá na str. 20)

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega} \quad (3.42)$$

zistíme, že menovateľ je v našom prípade kladný, a preto musí byť $D_i < 0$, aby sme získali nestabilitu. D_i má tvar (*Gurnett and Bhattacharjee* (2005)):

$$D_i = -\pi \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_n \int_0^{\infty} J_n^2 \left(\frac{v_{\perp} k_{\perp}}{\omega_c} \right) \cdot \left(\underbrace{k_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}}}_{\text{zvázok č.}} + \frac{n\omega_c}{v_{\perp}} \underbrace{\frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}}}_{\text{strat. kuž.}} \right) 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \bigg|_{v_{\parallel \text{Res}} = (\omega - n\omega_c)/k_{\parallel}}. \quad (3.60)$$

Nestabilita teda nastane, keď bude integrál kladný (ak dočasne uvažujeme $k_{\parallel} > 0$), čo kontrolujú členy $\partial F_0 / \partial v_{\parallel}$ a $\partial F_0 / \partial v_{\perp}$. V rýchlostnom priestore

integrujeme pozdĺž priamky

$$v_{\parallel \text{Res}} = \frac{\omega - n\omega_c}{k_{\parallel}} \quad (3.61)$$

cez $v_{\perp} = 0 \dots \infty$. Miesta, v ktorých sú $\partial F_0/\partial v_{\parallel}$ a $\partial F_0/\partial v_{\perp}$ kladné, sú potenciálnymi zdrojmi nestabilit a hovoríme im zdroje voľnej energie. Ak je integrál pre daný vlnový vektor kladný, nastáva nestabilita. Aby teda nestabilita nastala, musí mať rezonančná rýchlosť $v_{\parallel \text{Res}}$ správnu hodnotu, aby integračná priamka v rýchlostnom priestore distribučnej funkcie prechádzala miestami s voľnou energiou. Člen $\partial F_0/\partial v_{\parallel}$ súvisí so zdrojmi voľnej energie vo zväzkoch častíc pozdĺž magnetického poľa a člen $\partial F_0/\partial v_{\perp}$ zasa súvisí s distribučnými rýchlostnými funkciami so stratovým kužeľom. Polohu zdrojov voľnej energie ovplyvňuje Besselova funkcia a samotný tvar distribučnej funkcie. Samotný vznik nestability ešte ovplyvňuje rezonančná rýchlosť $v_{\parallel \text{Res}}$, ktorá je závislá na k_{\parallel} . Podobne ako u Bernsteinových módov, aj tu je frekvencia blízko harmonickým frekvenciám elektrónovej cyklotrónovej frekvencie (zvlášť pri vyšších násobkoch). Smer šírenia vlny však býva pod uhlom 70° až 80° .

Ďalšou triedou rezonantných nestabilit spôsobených anizotropiou rýchlostnej distribučnej funkcie sú nestability vyskytujúce sa pri vyšších harmonických iónovej cyklotrónovej frekvencie, kde rezonancia nastáva s iónmi. Pri analýze týchto nestabilit je potrebné do Harrisovej rovnice zahrnúť nielen ióny, ale aj elektróny, je však možné použiť rôzne aproximácie. Nakoniec opäť dostaneme vo vzťahu pre D_i integrál podobný (3.60), avšak znamienko integrálu rozhodujúce členy budú $\partial F_{i0}/\partial v_{\parallel}$ a $\partial F_{i0}/\partial v_{\perp}$, kde F_{i0} je nultý rád normovanej distribučnej funkcie pre ióny. Frekvencie sú opäť blízko vyšším harmonickým frekvenciám ω_{ci} a smer šírenia vln je takmer kolmý.

Príkladom nestability spôsobenej **elektrickým prúdom** je konfigurácia, keď iónová aj elektrónová zložka majú Maxwelllovské rýchlostné rozdelenia, ale distribúcia elektrónov je v paralelnom smere posunutá, má drift, čím vznikne výsledný pohyb elektrického náboja rovnobežne s magnetickým poľom. Nestabilita elektrostatických iónových cyklotrónových vln nastáva po prekročení kritickej driftovej rýchlosti, ktorá závisí na k_{\parallel} . Zdrojom voľnej energie sú oblasti v rýchlostnej distribúcii elektrónov s kladným $\partial F_{e0}/\partial v_{\parallel}$.

3.3.2 Elektromagnetické vlny

Pri elektromagnetických vlnách berieme do úvahy aj kmitajúce magnetické pole a elektrické pole už nie je možné popísať iba pomocou elektrostatického potenciálu. Musíme teda analyzovať vlnovú rovnicu. Tú získame kombináciou Faradayovho a Ampérovho zákona (3.8) a (3.9) a za použitia Ohmovho zákona $\vec{j} = \overleftrightarrow{\sigma} \vec{E}$, čím dostaneme

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{K} \cdot \vec{E} = 0, \quad (3.62)$$

kde dielektrický tenzor \overleftrightarrow{K} je definovaný

$$\overleftrightarrow{K} = \overleftrightarrow{1} + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \overleftrightarrow{\sigma}. \quad (3.63)$$

$\overleftrightarrow{\sigma}$ značí tenzor elektrickej vodivosti.

Vlnová rovnica (3.62) je homogénna lineárna diferenciálna rovnica, ktorú môžeme zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \cos^2 \theta & K_{xy} & K_{xz} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta \\ K_{yx} & K_{yy} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} & K_{yz} \\ K_{zx} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin \theta \cos \theta & K_{zy} & K_{zz} - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.64)$$

a ktorej (netriviálne) riešenia môžeme nájsť vyrátaním determinantu, ktorý položíme rovný nule, čím získame disperznú reláciu. Najprv je však potrebné z linearizovanej Vlasovovej rovnice pre distribučnú funkciu prvého rádu (3.54) vyjadriť distribučnú funkciu f_s , z nej určíme prúdovú hustotu \vec{j} , z ktorej zasa tenzor vodivosti, až sa dostaneme k dielektrickému tenzoru \overleftrightarrow{K} . Už pri riešení distribučnej funkcie sa pri integrovaní vo vzťahu objavajú Besselove funkcie, ktoré sa potom premietnu aj do výsledného vzťahu pre dielektrický tenzor. Opäť bude teda možné nájsť disperznú reláciu len numericky (až na určité špeciálne prípady). Jednotlivé zložky dielektrického tenzoru sú závislé na plazmovej frekvencii (koncentrácia plazmy), cyklotrónovej frekvencii (magnetické pole), vlnovom vektore a frekvencii, distribučných funkciách jednotlivých druhov častíc a obsahujú nekonečné sumy integrálov cez rýchlostný priestor s Besselovými funkciami. Výrazy pre jednotlivé zložky dielektrického tenzora \overleftrightarrow{K} je možné nájsť napr. v (*Gurnett and Bhattacharjee*, 2005, str. 370).

Paralelné šírenie, teda $\theta = k_{\perp} = 0$ situáciu podstatne zjednoduší, keďže z rovnice (3.64) vymiznú mnohé členy a zároveň zo zložiek tenzoru \overleftrightarrow{K} ostanú nenulové len K_{xx} , $K_{xy} = -K_{yx}$, K_{yy} a K_{zz} , pretože v zložkách K_{ij} často vystupuje člen $nJ_n(\beta_s)$, ale $\beta_s = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{cs} = 0$. S týmito zjednodušeniami má homogénna sústava lineárnych rovníc tri typy riešení: elektrostatické vlny s vlastným vektorom $\vec{E} = (0, 0, E_z)$ a dva elektromagnetické módy s vlastnými vektormi $\vec{E} = (E_0, iE_0, 0)$ a $\vec{E} = (E_0, -iE_0, 0)$. Posledným dvom módom (pravotočivý a ľavotočivý) odpovedá disperzná relácia

$$D(k, \omega) = K_{xx} - \frac{c^2 k_{\perp}^2}{\omega^2} \pm iK_{xy} = 0. \quad (3.65)$$

Po dosadení za K_{xx} a K_{xy} získame

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{s0}(v_{\parallel})}{v_{\parallel} - (\omega \pm \omega_{cs}) / k_{\parallel}} dv_{\parallel} = 0, \quad (3.66)$$

kde sme zaviedli redukovanú jednorozmernú distribučnú funkciu

$$\begin{aligned} G_{s0}(v_{\parallel}) &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{\omega}{k_{\parallel}} - v_{\parallel} \right) \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\perp}} + v_{\perp} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} \right] \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} = \\ &= -\frac{\omega}{k_{\parallel}} \int_0^{\infty} F_{s0} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} - \int_0^{\infty} \left(v_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$(3.68)$$

ktorú sme zároveň uviedli aj v tvare, ktorý za chvíľu využijeme. V disperznej relácii vidíme, že pri $v_{\parallel} = (\omega \pm \omega_{cs}) / k_{\parallel}$ máme pól, nastáva rezonancia

a to spôsobí tlmenie. Zámenou ω za $i\omega$ vykonáme Laplaceovu transformáciu a budeme skúmať disperznú reláciu už vyššie spomenutou aproximáciou pomalého rastu. Obvyklým spôsobom pre mieru rastu vlny získame

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega} = \pi \frac{k_{\parallel} / |k_{\parallel}|}{\partial D_r / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} G_{s0}(v_{\parallel}) \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel \text{Res}}} . \quad (3.69)$$

Skúmame najprv stabilitu vln pre špeciálny prípad **izotropnej** distribučnej rýchlostnej funkcie. Je možné ukázať, že za tohto predpokladu si budú obidva členy s parciálnymi deriváciami v druhom integrále v (3.68) navzájom rovné, a teda celkovo druhý integrál v (3.68) ostane rovný nule. Pre rast (tlmenie) teda platí

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega} = -\pi \frac{\omega / |k_{\parallel}|}{\partial D_r / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} F_{s0} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \Big|_{v_{\parallel}=v_{\text{Res}}=(\omega \pm \omega_{cs})/k_{\parallel}} . \quad (3.70)$$

Aj v tomto prípade sa dá ukázať, že $\partial D_r / \partial \omega > 0$, takže znamienko γ je záporné a ide o tlmenie, ktoré sa nazýva *cyklotrónové tlmenie*. Na rozdiel od Landauovho tlmenia pri elektrostatických vlnách, ktoré je úmerné sklonu distribučnej funkcie v mieste rezonančnej rýchlosti, je cyklotrónové tlmenie úmerné hodnote distribučnej funkcie v mieste paralelnej rezonančnej rýchlosti. Rozdiel vo fyzikálnej interpretácii je v tom, že zatiaľ čo Landauovo tlmenie spôsobovali častice pomalšie ako rezonančná rýchlosť, cyklotrónové tlmenie spôsobujú častice všeobecne v blízkosti rezonančnej rýchlosti.

Pre elektróny s Maxwellovým rýchlostným rozdelením (ktoré je izotropné) dostaneme

$$\gamma = -\pi \frac{\omega / |k_{\parallel}|}{\partial D_r / \partial \omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{mv_{\parallel \text{Res}}^2}{2k_B T} \right) \Big|_{v_{\text{Res}}=(\omega - \omega_c)/k_{\parallel}} . \quad (3.71)$$

Vidíme, že v rovnovážnej plazme je tlmenie exponenciálne závislé na vzdialenosti od cyklotrónovej frekvencie a najväčšie je práve pri cyklotrónovej frekvencii. Tiež si všimnime, že šírka pásma, v ktorom je tlmenie výrazné, sa s klesajúcou teplotou zužuje (a pri limite studenej plazmy $T \rightarrow 0$ vymizne⁸).

Vidíme, že paralelne sa šíriaca elektromagnetická vlna je v izotropnej plazme stále tlmená. Zdrojom nestabilit môže byť druhý integrál v (3.68) v prípade anizotropnej distribučnej funkcie, kedy už nie je rovný nule. Zároveň je potrebné, aby jeho príspevok prevážil príspevok prvého integrálu, ktorý je kladný a je zodpovedný za tlmenie. Príkladom distribučnej funkcie s anizotropiou je bi-Maxwellovo rýchlostné rozdelenie

$$f_s(v_{\perp}, v_{\parallel}) = n_{s0} \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_{s\perp}} \right) \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_{s\parallel}} \right)^{1/2} \cdot \exp \left(-\frac{m_s v_{\perp}^2}{2k_B T_{s\perp}} \right) \exp \left(-\frac{m_s v_{\parallel}^2}{2k_B T_{s\parallel}} \right), \quad (3.72)$$

⁸S výnimkou evanescentnej oblasti (ω_c, ω_R), tam je vlna tlmená iným mechanizmom.

dosadením ktorého do druhého integrálu (3.68) získame

$$\int_0^\infty \left(v_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \pi v_{\perp}^2 dv_{\perp} = v_{\parallel} \underbrace{\left(\frac{T_{s\perp}}{T_{s\parallel}} - 1 \right)}_{A_s} \int_0^\infty F_{s0} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}, \quad (3.73)$$

v ktorom sme zaviedli parameter anizotropie A_s (neskôr ešte budeme definovať anizotropiu $\alpha_s = T_{\perp}/T_{\parallel}$). Distribúcia s kladnou anizotropiou A_s má teplotu v kolmom smere väčšiu ako v paralelnom (zaužívané prirovnanie tvar disku, viď. obr. 3.7 (b)), pre zápornú anizotropiu to platí opačne (zaužívané prirovnanie tvar cigáry). Stabilita vln s bi-Maxwellovým rýchlostným rozdelením je potom daná vzťahom

$$\gamma = \frac{\pi}{\partial D_r / \partial \omega} \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(-\frac{\omega}{|k_{\parallel}|} - \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} v_{\parallel \text{Res}} A_s \right) \int_0^\infty F_{s0} 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \Big|_{v_{\parallel} = v_{\parallel \text{Res}}}. \quad (3.74)$$

Vlna môže byť nestabilná iba ak je súčin $k_{\parallel} v_{\parallel \text{Res}} A_s$ záporný a zároveň dostatočne veľký, aby prekonal tlmenie spôsobené členom $\omega/|k_{\parallel}|$.

Jedným z prípadov paralelného šírenia elektromagnetickej vlny je **hvizdový mód**. Disperznú reláciu hvizdového módu je možné odvodiť z (3.66) za použitia priblíženia pre nízku teplotu a dlhovlnného limitu. Rovnaký výsledok je možné získať použitím distribučnej funkcie studenej plazmy v tvare

$$F_{s0} = \frac{1}{2\pi v_{\perp}} \delta(v_{\perp}) \delta(v_{\parallel}), \quad (3.75)$$

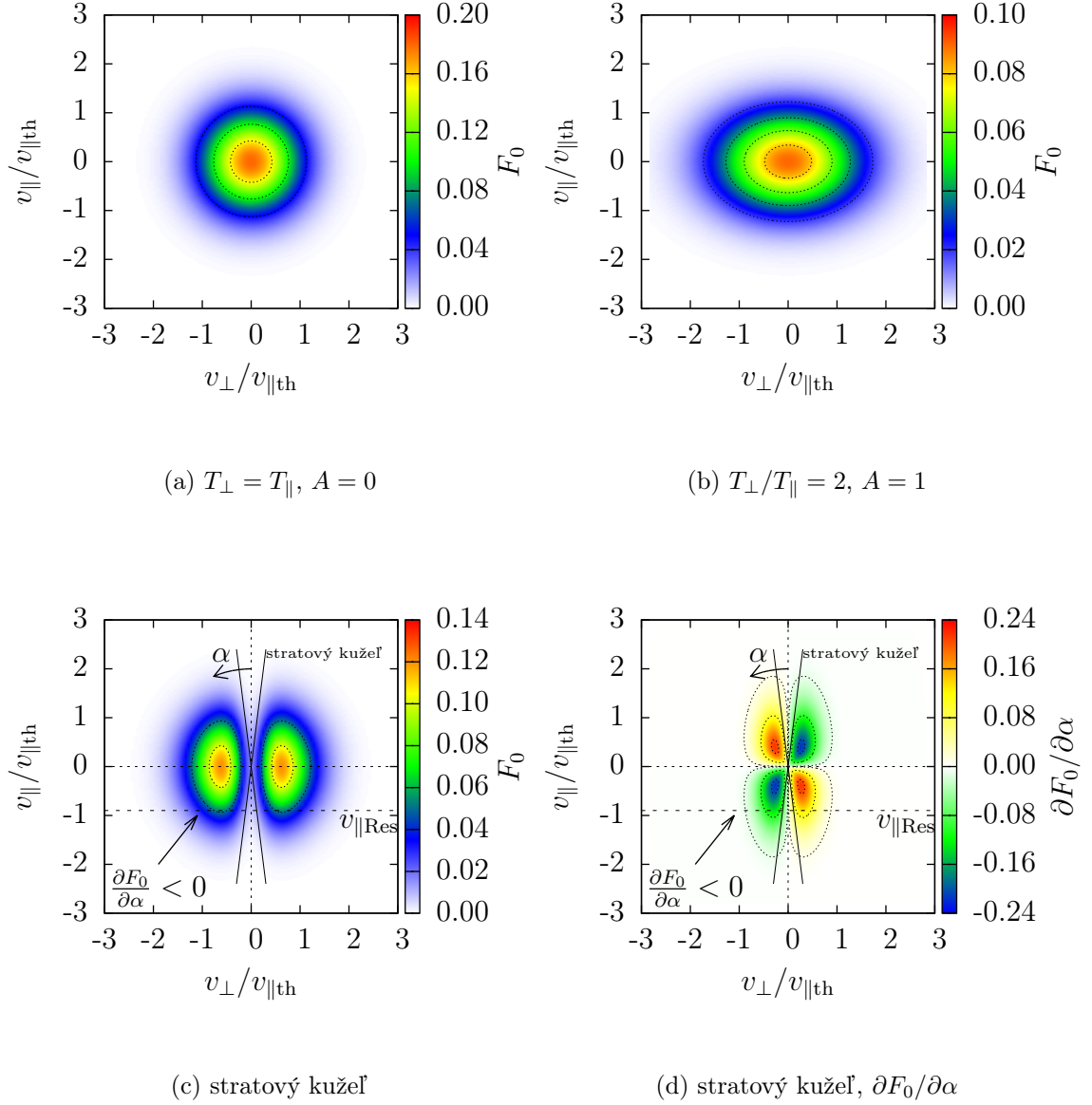
čím získame

$$D(k, \omega) = 1 - \underbrace{\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2}}_{(\text{index lomu})^2} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{cs})} = 0. \quad (3.76)$$

Ak zoberieme do úvahy iba zložku elektrónov (ióny považujeme za nepohyblivé) a do disperznej relácie dosadíme pre elektróny $\omega_c = -\omega_{ce}$, získame rovnaké disperzné relácie ako pre R a L-vlny v zhrnutí v tab. 3.2. Znamienko plus teda odpovedá pravotočivej R-vlny (hvizdový mód) a mínus odpovedá ľavotočivej L-vlny. Ak použijeme aj aproximáciu vysokej koncentrácie (plazmovej frekvencie), môžeme v disperznej relácii zanedbať jednotku a s použitím znamienka plus pre reálnu časť disperznej relácie hvizdového módu získame

$$D_r = -\frac{c^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega_c - \omega)} = 0. \quad (3.77)$$

Rezonančná rýchlosť elektrónov preto bude (podľa pólu v (3.66)) $v_{\parallel \text{Res}} = (\omega - \omega_c)/k_{\parallel} = -(\omega_c - \omega)/k_{\parallel}$. Frekvencia vo hvizdovom móde je stále menšia ako elektrónová cyklotrónová frekvencia, preto majú $v_{\parallel \text{Res}}$ a k_{\parallel} opačné znamienka. Dôvodom je to, že frekvencia vlny musí byť Dopplerovsky zvýšená až na elektrónovú cyklotrónovú frekvenciu, ktorú „cítia“ elektróny pohybujúce



Obr. 3.7: Ukážka bi-Maxwellovho rýchlostného rozdelenia (a-b) podľa (3.72) s anizotropiou A definovanou podľa $A = T_{\perp}/T_{\parallel} - 1$ a rýchlostného rozdelenia so stratovým kužeľom (c) (definovaný podľa (5.1) resp. *Rönnmark* (1982)). Na obr. (d) je graf parciálnej derivácie distribučnej funkcie so stratovým kužeľom v smere pitch uhla, $\partial F_0/\partial\alpha$. Znázornená rezonančná rýchlosť $v_{\parallel\text{Res}}$ je záporná, nestabilita teda môže nastať pre $k_{\parallel} > 0$. Termálna rýchlosť $v_{\parallel\text{th}} = 2k_{\text{B}}T_{\parallel}/m$.

sa rezonančnou rýchlosťou, $\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = \omega_c$. A keďže majú vlnový vektor a rezonačná rýchlosť elektrónov opačné znamienko, nestabilita nastane v prípade bi-Maxwellovho rýchlostného rozdelenia, iba ak bude anizotropia definovaná podľa (3.73) kladná, teda teplota elektrónov $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Zmysel polarizácie vlny v súradnicovej sústave rezonančných častíc musí byť rovnaký ako zmysel rotácie rezonančných častíc. Pre hvizdový mód a elektróny je táto podmienka splnená (pravotočivá kruhová polarizácia).

Pozrime sa na stabilitu vlny. Častice, ktoré sú uväznené v magnetických zrkadlách, resp. v radiačných pásoch v magnetosférach planét, sú často popísané distribučnými funkciami so stratovým kužeľom, takže je vhodnejšie popísať distribučnú funkciu nie v cylindrických súradniciach $F_0(v_{\perp}, v_{\parallel})$, ale v polárnych súradniciach $F_0(v, \alpha)$, kde v je veľkosť rýchlosti a α je uhol meraný od smeru magnetického poľa k vektoru rýchlosti, tzv. *pitch* uhol, platí $\tan \alpha = (-v_{\perp}/v_{\parallel})$. V tomto popise sa zátvorka v druhom integrále (3.68) rovná $(v_{\parallel} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\perp}} - v_{\perp} \frac{\partial F_{s0}}{\partial v_{\parallel}}) = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}$. Spolu s ďalšími úpravami je potom možné popísať stabilitu hvizdového módu pomocou

$$\gamma = \pi \omega_c \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 |v_{\parallel \text{Res}}| \left(A - \frac{\omega}{\omega_c - \omega}\right) \int_0^{\infty} F_0 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel \text{Res}}}, \quad (3.78)$$

kde je anizotropia A v tomto prípade definovaná pomocou

$$A = \frac{\int_0^{\infty} (k_{\parallel}/|k_{\parallel}|)(-\partial F_0/\partial \alpha) |\tan \alpha| \pi v_{\perp} dv_{\perp}}{\int_0^{\infty} F_0 2\pi v_{\perp} dv_{\perp}} \Big|_{v_{\parallel}=v_{\parallel \text{Res}}}. \quad (3.79)$$

Vlna vo hvizdovom móde bude nestabilná, ak bude A dostatočne kladné. Dá sa ukázať, že distribučné funkcie so stratovým kužeľom majú kladnú anizotropiu a sú teda nestabilné (viď. obr. 3.7 (c), derivácia $\partial F_0/\partial \alpha$ je znázornená na obr. 3.7 (d)).

Nestability hvizdového módu hrajú dôležitú úlohu v rozptyle pitch uhla a strate elektrónov z radiačných pásov. V radiačných pásoch planét sa objavujú dva typy emisií elektromagnetických vĺn vo hvizdovom móde — tzv. sykot (*angl. hiss*) s nevýrazným spektrom podobajúcemu sa šumu a chorus, ktorý má charakteristické výrazné spektrum obsahujúce diskkrétne tóny s meniacou sa frekvenciou v čase. Sykot môže byť generovaný v rôznych oblastiach — v plazmasfére, mimo nej, aj v aurorálnej oblasti Zeme.

Ďalšími vlnami, ktoré sa šíria vo hvizdovom móde, sú samotné hvizdy, ktoré sú generované bleskami. Bleskový výboj generuje širokospektrálny (niekoľko desiatok kHz) signál (tzv. sférika), ktorý počas šírenia pozdĺž magnetických čiar opustí ionosféru a v magnetosfére sa kvôli disperzii zmení na klesajúci tón. Hvizd je teda odozvou magnetosféry na krátky širokopásmový impulz. Hvizdy boli detekované sondami Voyager 1 a 2 aj v blízkosti Jupitera, čo poukázalo na prítomnosť bleskov na Jupiteri.

Hvizdy, sykot a chorus sa vyskytujú v rádiovkej oblasti veľmi nízkych frekvencií (VLF), ktoré korešpondujú so zvukovými frekvenciami, čím sa dajú vysvetliť použité názvy, keďže pri prvých pozorovaniach boli tieto vlny prevádzané na zvukové vlny pomocou rádiových prijímačov.

Až doteraz sme sa venovali paralelnému šíreniu, ktoré vedie k mnohým zjednodušeniam, keď v jednotlivých zložkách dielektrického tenzoru $\vec{\vec{K}}$ boli

integrály s Besselovými funkciami rovné nule pre všetky n okrem $n = 0, \pm 1$. Paralelné šírenie sa preto zredukovalo na výsledky známe z teórie studenej plazmy (elektromagnetické cyklotrónové módy). Pre všeobecné smery šírenia však tieto zjednodušenia neplatia a prítomnosť Besselových funkcií vyšších rádov prinesie nové módy, ktoré v teórii studenej plazmy nenájdeme. Integrály v zložkách \vec{K} obsahujú v menovateli člen $k_{\parallel}v_{\parallel} - \omega + n\omega_{cs}$, ktorý vytvára póly, tie je však možné obísť zmenou dotknutých integrálov na krivkové integrály v komplexnej rovine a získanú disperznú reláciu $D(\vec{k}, p) = 0$ môžeme opäť metódou pomalého rastu rozložiť na reálnu a imaginárnu časť D_r a D_i . Reálna časť disperznej relácie zodpovedá za šírenie vlny, $\omega(\vec{k})$, a imaginárna časť určuje rast resp. tlmenie vlny, γ .

Každý mód šírenia súvisí s konkrétnym rádom n integrálu s Besselovou funkciou $J_n(\beta_s)$, ktorej parametrom je $\beta_s = k_{\perp}v_{\perp}/\omega_{cs}$ (viď. (3.55)), teda súčin Larmorovho polomeru a kolmej zložky vlnového vektora. Tieto vyššie módy môžu byť zanedbané iba keď $\beta_s \ll 1$, teda keď je cyklotrónový polomer výrazne menší ako vlnová dĺžka v kolmom smere.

Rovnako ako aj pre paralelné šírenie (alebo aj elektrostatické vlny) platí, že zdrojmi voľnej energie pre rezonančné nestability vĺn sú zväzky častíc (beam) a stratový kužeľ, s ktorými súvisia členy $\partial F_0/\partial v_{\parallel}$ resp. $\partial F_0/\partial v_{\perp}$. Pri elektrostatických vlnách do rezonancie vstupovalo len elektrické pole, avšak pri všeobecnom smere šírenia elektromagnetických vĺn do rezonancie vstupuje okrem elektrického aj magnetické pole. V niektorých prípadoch dokonca hraje magnetická zložka dominantnú úlohu.

Kapitola 4

Ciele práce

Ciele sledované pri vypracovaní tejto práce sa dajú zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- zvládnutie a pochopenie princípov interakcie vĺn a častíc v magnetosfére Zeme
- spracovanie a zobrazenie dát z družicových časticových meraní
- osvojenie si práce s programom WHAMP na hľadanie disperznej relácie a s pomocou vytvoreného doplnkového softvéru hromadne a automaticky skúmať možnosti šírenia vĺn v rôznych smeroch a pre rôzne parametre plazmy s grafickým výstupom
- identifikovanie a analýza nestabilít pre tieto podmienky
- hľadanie parametrov plazmy pre väčšie nestability

Kapitola 5

Praktická časť

5.1 Model plazmy, numerické hľadanie disperznej relácie programom WHAMP

Videli sme, že určiť disperznú reláciu analyticky je možné len pre veľmi jednoduché a špeciálne prípady. Pre výpočet disperznej relácie horúcej viaczložkovej plazmy v magnetickom poli je nutné použiť numerické metódy (*Menietti et al.* (2011), *Santolík et al.* (2011)). Tento problém rieši napr. nami použitý kód WHAMP — *Waves in Homogenous, Anisotropic Multicomponent Plasmas* (*Rönnmark* (1982)). WHAMP je program na riešenie disperznej relácie vln v zmagnetizovanej plazme, ktorá pozostáva z rôznych (maximálne šiestich) zložiek s s maxwellovským rýchlostným rozdelením, ktoré sú popísané pomocou hmotnosti častíc, koncentrácie n_s , teploty (paralelná, vyjadrená pomocou termalnej rýchlosti v_{ths} , s ktorou súvisí aj hmotnosť častice), teplotnej anizotropie $\alpha_s = T_{\perp}/T_{\parallel}$, driftovej rýchlosti v_{ds} a stratového kužľa (vyjadreného pomocou parametrov β_s a Δ_s)¹. Dielektrický tenzor je vypočítaný pomocou kinetickej teórie homogénnej plazmy (*Rönnmark* (1983)). Program je vhodný na použitie v prípadoch, keď môžeme homogénnu plazmu v magnetickom poli aproximovať lineárnou kombináciou Maxwellovských zložiek (*Rönnmark* (1982)). Program WHAMP na výpočet nekonečných súm modifikovaných Besselových funkcií využíva Padého aproximáciu, čo bolo dané výpočtovými možnosťami počítačov v čase vzniku programu. Výstupom programu je disperzná relácia v podobe závislosti komplexnej frekvencie na reálnom vlnovom vektore. Reálna zložka komplexnej frekvencie predstavuje klasickú frekvenciu, imaginárna zložka popisuje rast (tlmenie) vlny. Distribučná funkcia plazmy má tvar (*Rönnmark* (1982))

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \sum_{s=1}^6 n_s \frac{1}{(\sqrt{\pi} v_{ths})^3} \exp \left[- \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{ths}} - v_{ds} \right)^2 \right] \cdot \left[\frac{\Delta_s}{\alpha_s} \exp \left(- \frac{v_{\perp}^2}{\alpha_s v_{ths}^2} \right) + \frac{1 - \Delta_s}{\alpha_s - \beta_s} \left[\exp \left(- \frac{v_{\perp}^2}{\alpha_s v_{ths}^2} \right) - \exp \left(- \frac{v_{\perp}^2}{\beta_s v_{ths}^2} \right) \right] \right]. \quad (5.1)$$

Z tohto tvaru distribučnej funkcie je možné vidieť, že stratový kužel vznikne vzájomným odčítaním dvoch maxwellovských rozdelení a jeho tvar je daný

¹ *Rönnmark* (1982) namiesto α_s , β_s , resp. v_{ths} používa značenie α_{1s} , α_{2s} , resp. v_s .

dvoma parametrami β_s a Δ_s (posledné štyri členy v (5.1)). Pri zvolení $\Delta_s = 1$ sa distribučná funkcia pre danú zložku redukuje na bi-Maxwellovo rozdelenie (3.72).

5.2 Dáta z družice Cluster

Z pozorovania samostatnej družice v magnetosfére, ktorá pozdĺž svojej dráhy zaznamená zmenu meranej veličiny, nie je možné jednoznačne určiť, či ide o časovú zmenu alebo o priestorovú zmenu spôsobenú jej pohybom pozdĺž jej dráhy (alebo kombinácia oboch). Cieľom misie Cluster je meranie jemných štruktúr v magnetosfére v troch rozmeroch a v závislosti na čase, čo je možné pomocou aspoň štyroch družíc, ktoré sú umiestnené na podobných (ale nie koplanárnych) dráhach (*Johnstone et al. (1997)*).

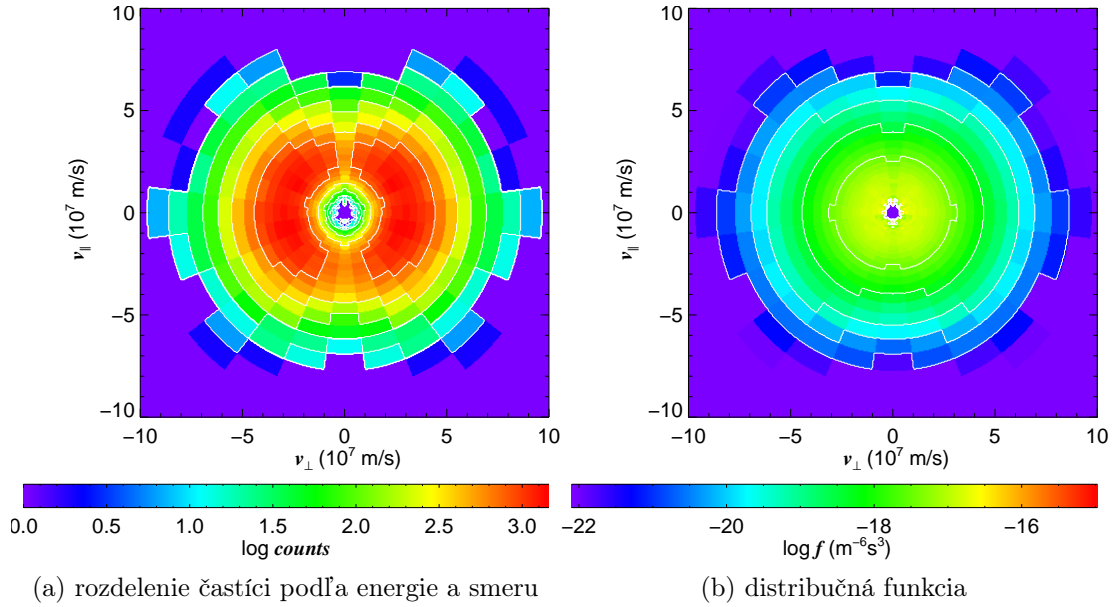
Vesmírna misia Cluster je spoločným projektom Európskej vesmírnej agentúry (ESA) a NASA, ktorého cieľom je pomocou štyroch identických družíc skúmať magnetosféru Zeme. Štyri družice Cluster boli vypustené na obežnú dráhu v dvojiciach v júli a auguste 2010. V tetrahedrálnej formácii obiehajú Zem po eliptických polárnych dráhach s dobou obehu 57 hodín. Projekt bol pôvodne odsúhlasený v roku 1986, avšak pri štarte rakety s prvými družicami v roku 1996 došlo k výbuchu a projekt, už ako Cluster II, ďalej pokračoval zostrojením nových družíc (*European Space Agency (2012)*).

Dáta použité v tejto práci sú z prístroja PEACE (Plasma Electron And Current Experiment) — elektrónový analyzátor, ktorý meria rýchlostné rozdelenie elektrónov v troch rozmeroch a v energetickom spektre 0,59 eV až 26,4 keV. PEACE pozostáva z dvoch senzorov, LEEA a HEEA (Low Energy respektíve High Energy Electron Analyser). Sú rovnakého typu a obidva sú schopné pokryť rovnakú energetickú oblasť, odlišujú sa však geometrickým faktorom, kvôli ktorému sa hodia na rozdielne energetické oblasti.

Zorné pole senzorov je 180° a smeruje radiálne preč z družice. Sensory sú umiestnené na protiľahlých stranách, takže na celkové uhlové pokrytie teoreticky stačí polovička rotácie družice (*Johnstone et al. (1997)*).

Dáta použité v tejto práci sú z prístroja HEEA s energiami v rozmedzí 32 eV až 26,4 keV, ktoré zaznamenala družica Cluster 2 15.2.2006 v čase 9:56:57,112 až 9:57:17,796 UTC, čomu odpovedá päť rotácií okolo svojej osi (družice za minútu vykonajú 15 rotácií). Na spektrogramoch na obr. 5.1 sú znázornené súhrnné počty detekcií elektrónov v jednotlivých energetických oblastiach a uhloch (a) a príslušná distribučná funkcia (b).

Aby bolo možné pracovať s programom WHAMP na hľadanie disperznej relácie, je potrebné na nameranú distribučnú funkciu naftovať model (5.1). Podľa *Grimald and Santolík (2010)* namerané dáta reprezentujú tri rodiny elektrónov s parametrami v tab. 5.1. Prvá rodina elektrónov, ktorá svojím podielom 97,46 % tvorí základ, má teplotu 10 eV a anizotropiu 0,08, čiže kolmá teplota je menšia a to len 0,8 eV. Ďalšie rodiny elektrónov sú horúce. Druhá s podielom 1,69 % má paralelnú teplotu 1180 eV a anizotropiu 0,98. Tretia rodina elektrónov má zastúpenie 0,85 %, teplotu 1890 eV, anizotropiu 1,16 a má už aj stratový kužeľ s priradenými parametrami $\beta = 0,2$ a $\Delta = 1,0$.



Obr. 5.1: Dáta zo senzoru HEEA na prístroji PEACE družice Cluster 2 z 15.2.2006 v čase 9:56:57,112 až 9:57:17,796 UTC (päť rotácií okolo svojej osi). Počty detekcií elektrónov (a) a príslušná distribučná funkcia (b).

<i>Parametre distribučnej funkcie</i>						
	$n [\text{cm}^{-3}]$	$v_{\text{th}} [\text{eV}]$	T_{\perp}/T_{\parallel}	β	Δ	
hlavná populácia elektrónov	47,24	10	0,08	0,0	1,0	
horúce elektróny	0,82	1180	0,98	0,0	1,0	
horúce elektróny	0,41	1890	1,16	0,2	0,0	
ióny	48,47	0	1	0,0	1,0	
<i>Ďalšie parametre plazmy</i>						
veľkosť magnetického poľa B_0	281,3 nT					
el. cyklotrónová frekvencia f_{ce}	7 875 Hz					
plazmová frekvencia f_{pe}	62 505 Hz	$= 7,937 f_{\text{ce}}$				
horná hybridná frekvencia ω_{UH}	63 000 Hz	$= 8,00 f_{\text{ce}}$				
orez L módu ω_{L}	58 690 Hz	$= 7,45 f_{\text{ce}}$				
orez R módu ω_{R}	66 570 Hz	$= 8,45 f_{\text{ce}}$				
Larmorov polomer prvej zložky el.	37,9 m					

Tabuľka 5.1: Parametre distribučnej funkcie (5.1) naftovanej na namerané dáta z časticového analyzátoru HEEA na prístroji PEACE a niektoré ďalšie parametre plazmy.

V plazme bolo magnetické pole $B_0 = 281,3 \text{ nT}$, čomu odpovedá elektrónová cyklotrónová frekvencia $f_{ce} = 7,875 \text{ kHz}$.

5.3 Nájdenie disperznej relácie pre rôzne smery šírenia vlny

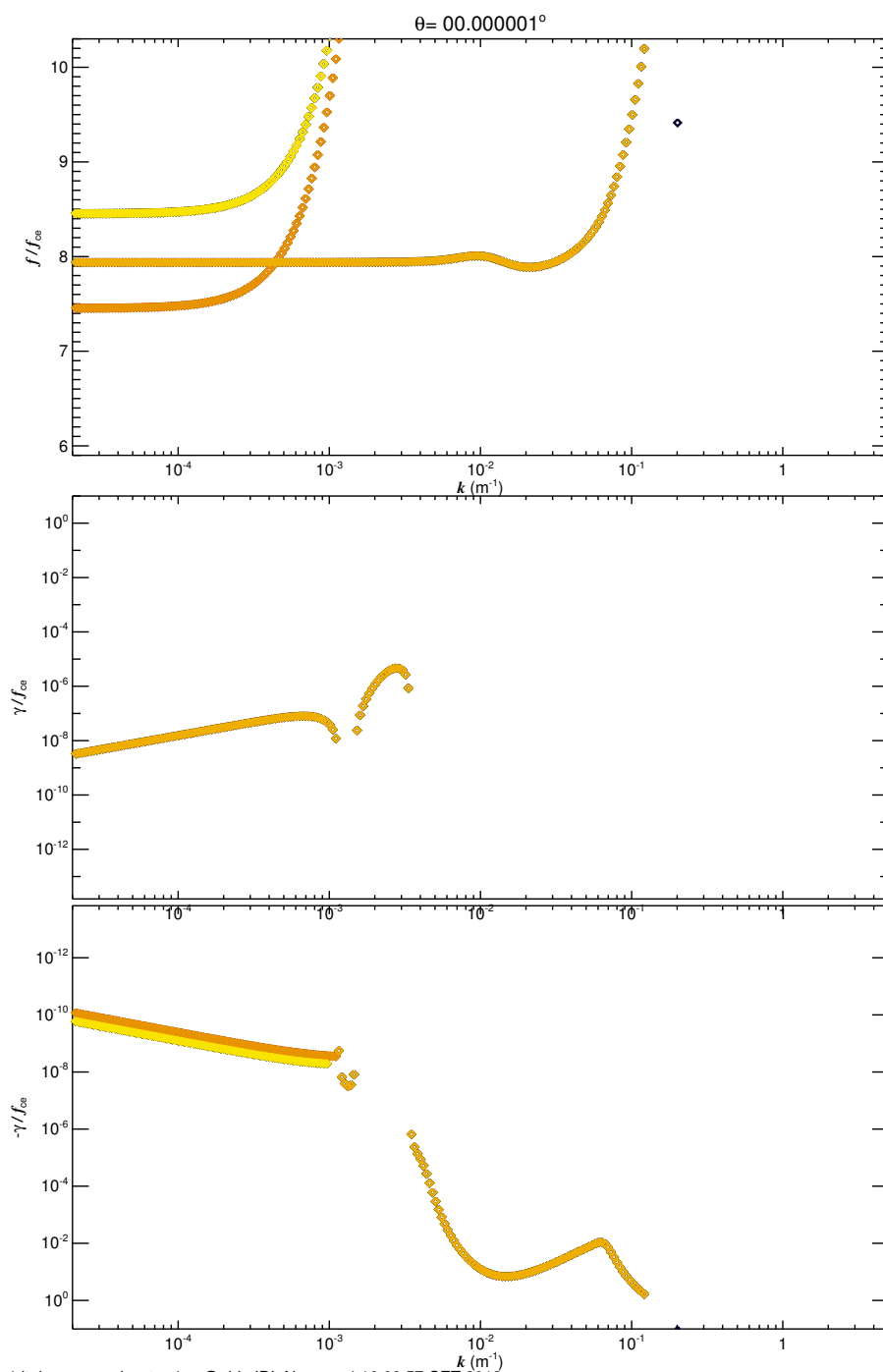
Po získaní parametrov plazmy bolo možné hľadať numericky (za použitia programu WHAMP) disperznú reláciu pre rôzne smery šírenia vlny, aby sme zistili, v ktorých smeroch sa vlna šíri v akých módoch a s akým tlmením/zosilením. Okrem zadania parametrov plazmy je programu WHAMP potrebné zadať rozsah hodnôt zložiek vlnového vektora k_\perp a k_\parallel , ktoré postupne po riadkoch prechádza, a počiatočný odhad reálnej frekvencie. Správny počiatočný odhad frekvencie je dôležitý pre to, aby sa program pri prechádzaní hodnôt zložiek vlnového vektora „držal“ daného vlnového módu. Za týmto účelom boli vytvorené počítačové skripty, ktoré spúšťajú program WHAMP s rôzne generovanými počiatočnými odhadmi frekvencie. Jeden skript napr. zadá na prvý vstup úvodný odhad frekvencie a ako nový odhad v ďalšom kroku použije výslednú frekvenciu z predchádzajúceho výstupu. Ďalší skript nový odhad frekvencie určí z frekvencie a parciálnych derivácií disperznej relácie (komplexné $\partial D/\partial k_\perp$ a $\partial D/\partial k_\parallel$) z predchádzajúceho výstupu. Tretí skript na vstup dáva stále rovnaký odhad frekvencie. Každý z týchto skriptov uspel ako najvhodnejší (ktorý sa najlepšie drží daného módu) pri rôznych smeroch šírenia a podmienkach.

V grafoch disperznej relácie majú jednotlivé módy alebo aj ich časti rôzne farby, aby bolo v grafoch jednoduchšie navzájom k sebe priradiť reálne a imaginárne časti tej istej vetvy.

Disperzná relácia pre paralelné šírenie ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, $\theta = 0,000001^\circ$) je na obr. 5.2. V hornej časti sa nachádza reálna zložka frekvencie, v spodnej časti je do dvoch grafov rozdelená kladná (rast) a záporná (tlmenie) časť imaginárnej frekvencie γ v logaritmickej škále. Môžeme vidieť dva elektromagnetické módy — L a R módy s orezovými frekvenciami $\omega_L = 7,45 \omega_{ce}$ a $\omega_R = 8,45 \omega_{ce}$ a elektrostatické Langmuirove vlny s orezom $\omega_{pe} = 7,937 \omega_{ce}$. Pri pohľade na imaginárnu časť frekvencie γ je možné vyčítať, že R a L módy sú (v danom zobrazenom frekvenčnom rozsahu) mierne tlmené a Langmuirov mód je do $k = 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ mierne zosilovaný, potom na krátko preskočí jeho vetva v imaginárnej časti do záporných hodnôt, potom v rozsahu $1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ až $3,1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ je vlna mierne zosilovaná a pre k väčšie ako $3,1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ je Langmuirova vlna výrazne tlmená.

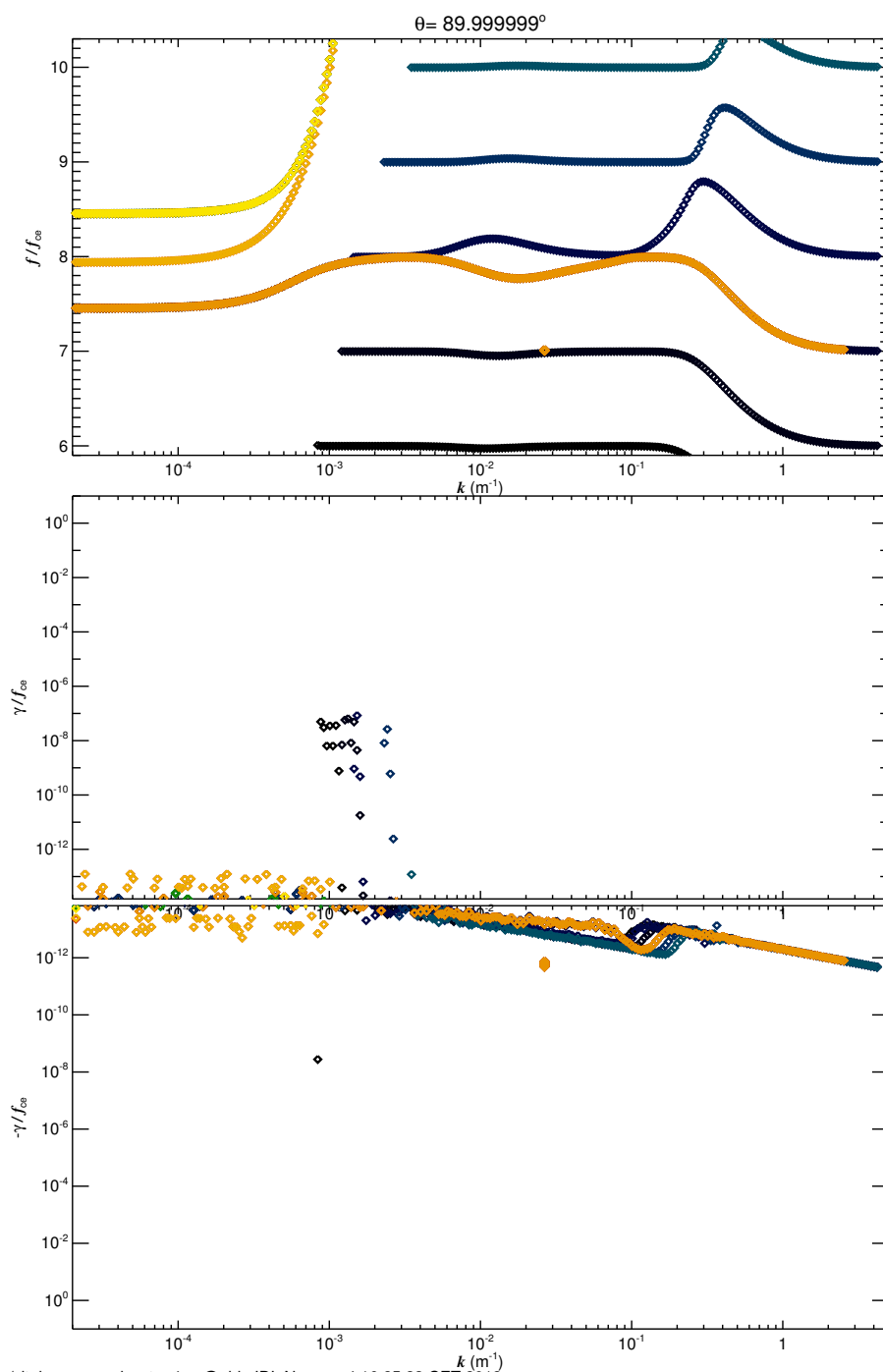
5.4 Bernsteinove módy

Podobne disperzná relácia pre kolmé šírenie ($\vec{k} \perp \vec{B}_0$, $\theta = 89,999999^\circ$) je na obr. 5.3. Na grafe vidíme tri elektromagnetické vlny — riadny mód O zdola ohraničený orezom na plazmovej frekvencii $\omega_{pe} = 7,937 \omega_{ce}$ a dva mimoriadne módy X s orezmi na $\omega_L = 7,45 \omega_{ce}$ a $\omega_R = 8,45 \omega_{ce}$. Skupina módov, ktoré nájdeme pre $k > 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ a ktoré sa nachádzajú medzi celočíselnými ná-



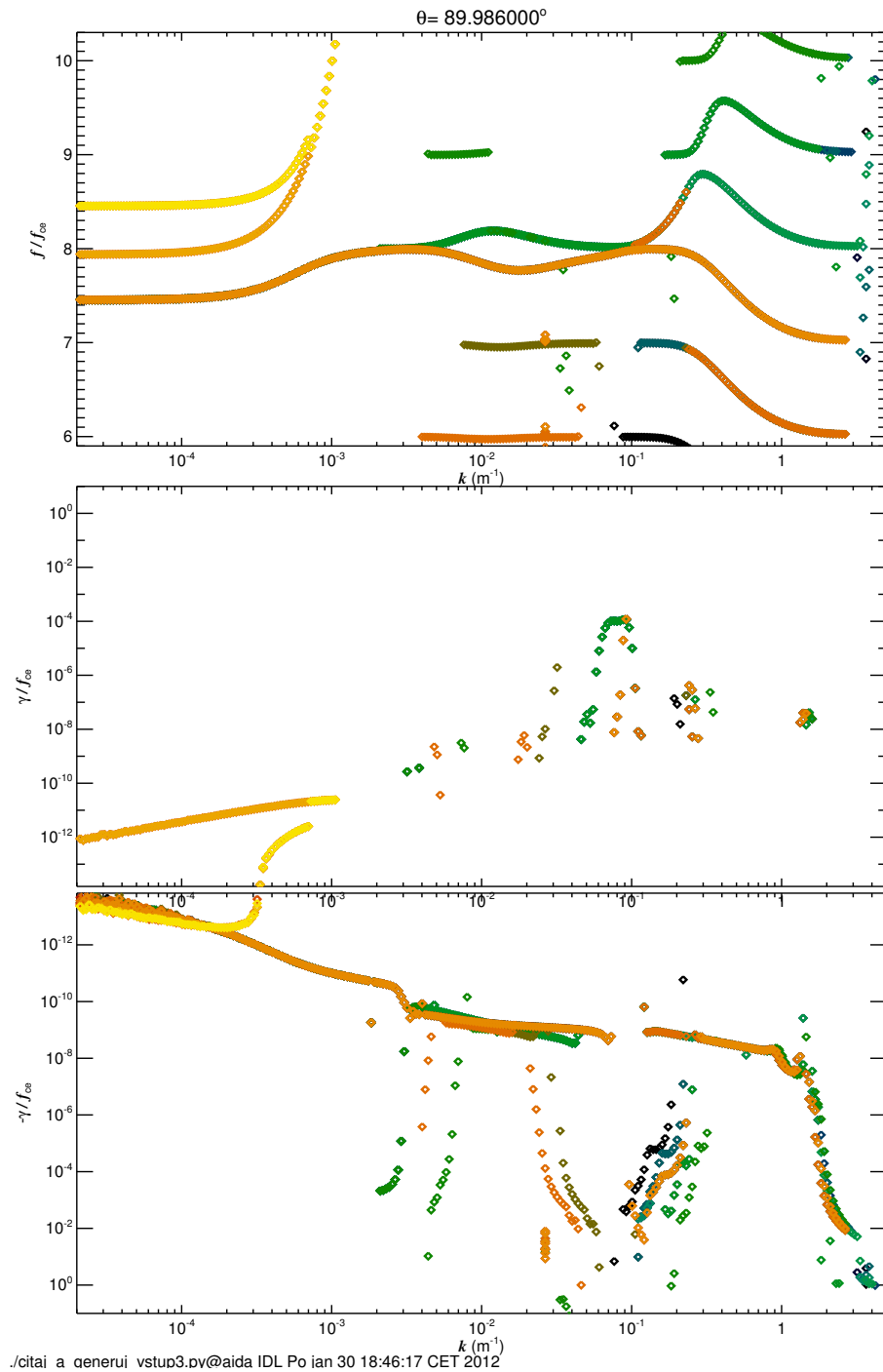
./citai a generui vstup4.py@aia IDL Ne mar 4 16:09:57 CET 2012

Obr. 5.2: Numericky získaná disperzná relácia pre *paralelné* šírenie. Reálna časť frekvencie v hornom grafe, imaginárna časť frekvencie v spodných dvoch grafoch (kladná a záporná časť v logaritmickej škále).

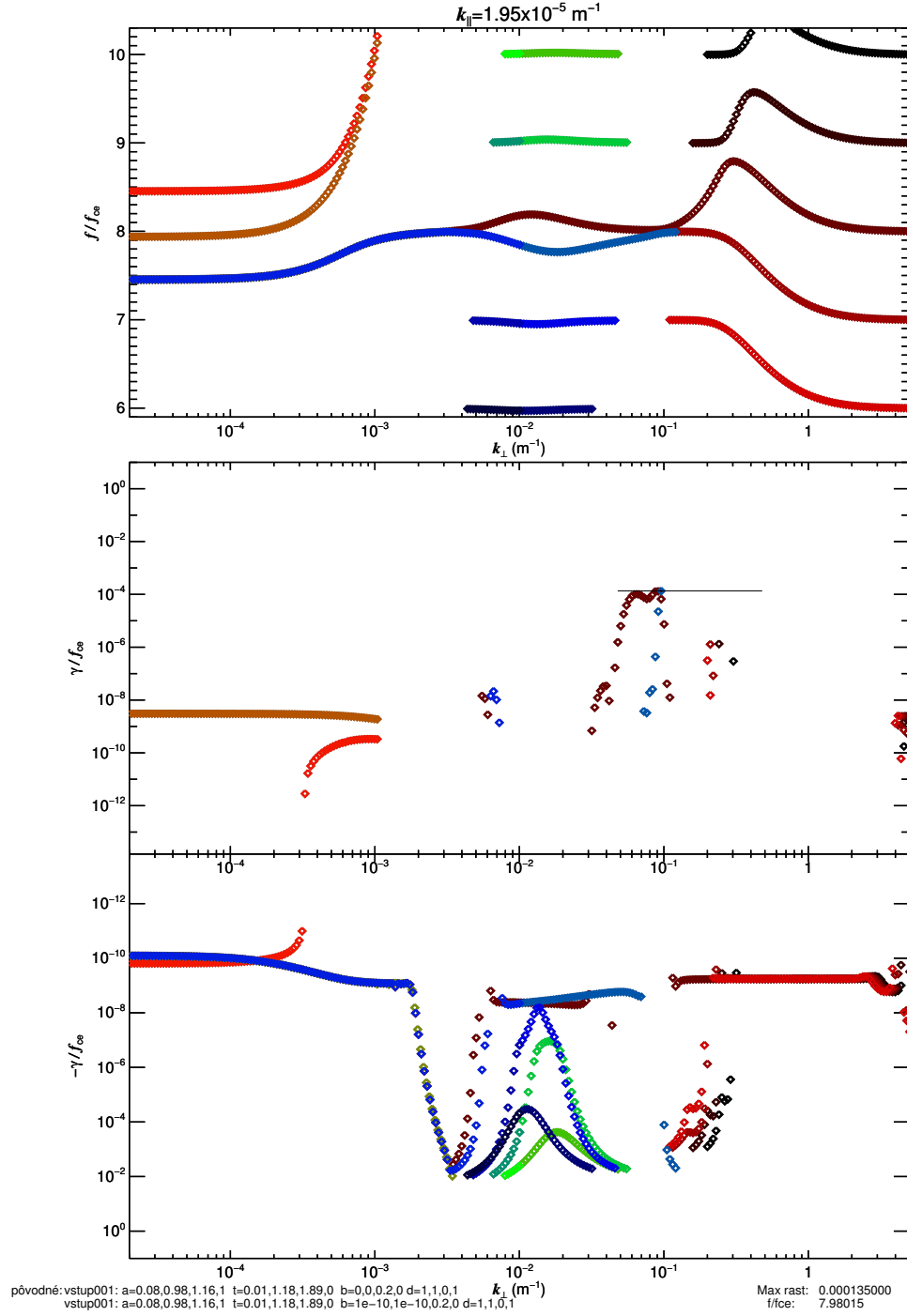


./citai a generui vstup4.py@aida IDL Ne mar 4 16:25:33 CET 2012

Obr. 5.3: Numericky získaná disperzná relácia pre *kolmé* šírenie. Reálna časť frekvencie v hornom grafe, imaginárna časť frekvencie v spodných dvoch grafoch (kladná a záporná časť v logaritmickej škále).



Obr. 5.4: Numericky získaná disperzná relácia pre smer šírenia s maximálnym identifikovaným rastom ($\theta = 89,9860^\circ$). Reálna časť frekvencie v hornom grafe, imaginárna časť frekvencie v spodných dvoch grafoch (kladná a záporná časť v logaritmickej škále).



Obr. 5.5: Numericky získaná disperzná relácia v závislosti na k_{\perp} pre $k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Reálna časť frekvencie v hornom grafe, imaginárna časť frekvencie v spodných dvoch grafoch (kladná a záporná časť v logaritmickej škále). Najväčší rast nastáva pri $k_{\perp} \approx 10^{-1} \text{ m}^{-1}$ a pre frekvenciu $\omega/\omega_{ce} \approx 7,98015$.

sobkami f_{ce} , sú elektrostatické Bernsteinove módy, fenomén horúcej plazmy, ktoré sa v teórii studenej plazmy nevyskytujú. Rast (tlmenie) všetkých vln je nulový ($|\gamma|/f_{ce} < 10^{-12}$; náhodne roztrúsené body v oblasti rastu sú zrejme spôsobené zaokruhľovacou chybou), čo je spôsobené tým, že vlna sa šíri paralelným smerom a rezonančná rýchlosť je nekonečná.

5.5 Hľadanie rastu

Pri hľadaní maximálneho rastu v oblasti blízkej kolmému šíreniu boli vykreslené disperzné relácie pre jednotlivé uhly s malým krokom. Najväčší rast, a to $\gamma/f_{ce} \approx 10^{-4}$, bol pozorovaný pre uhol $\theta = 89,9860^\circ$ pri $k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Práve paralelná zložka vlnového vektora súvisí s rezonančnou rýchlosťou (3.61). Preto sme pre túto fixnú hodnotu k_{\parallel} našli disperznú reláciu v závislosti na kolmej zložke k_{\perp} , ktorá je na obr. 5.5.

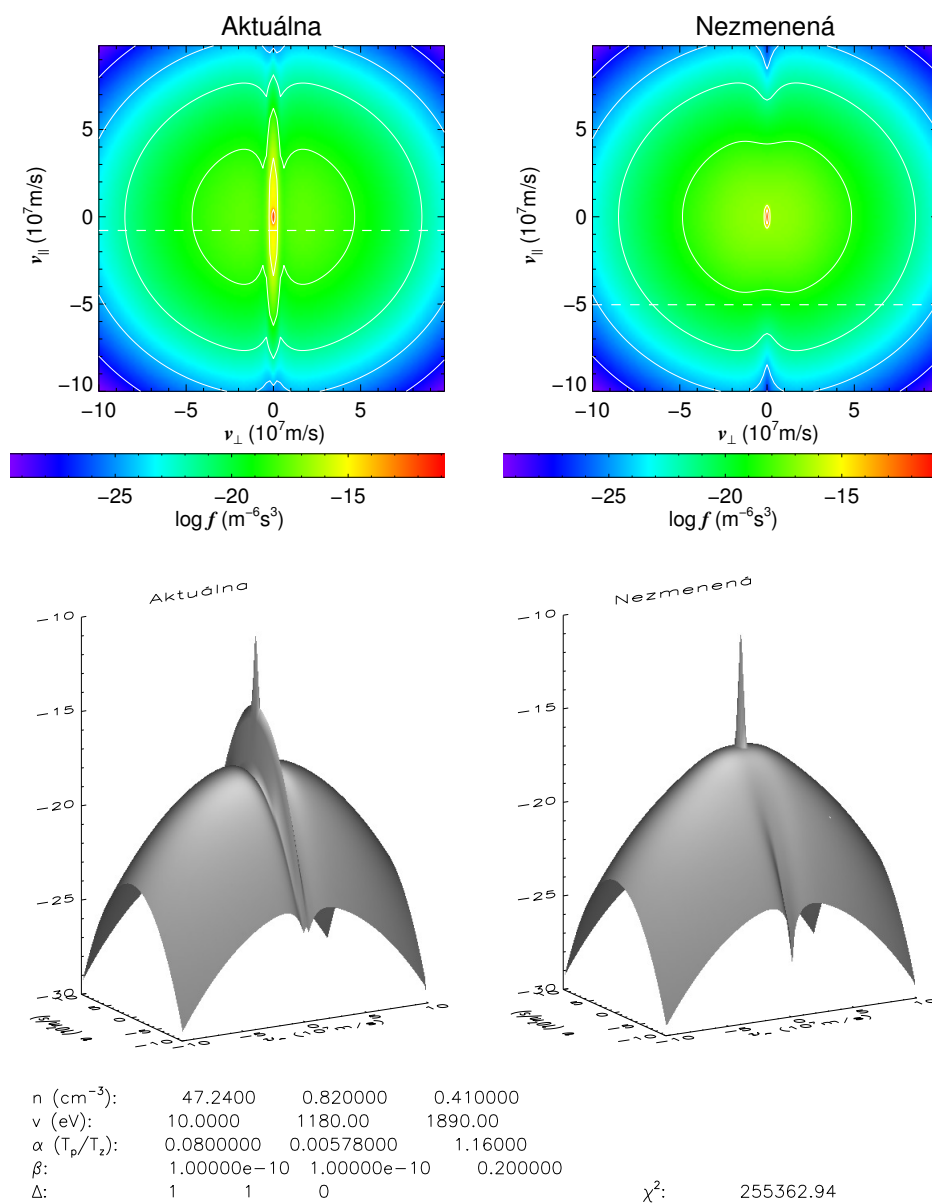
Ďalej sme sa snažili hýbať nabitými parametrami distribučnej funkcie a sledovať, ako sa bude pri tom meniť maximálna hodnota rastu. Postupne sme menili teploty a anizotropie všetkých troch zložiek (rodín častíc) a hĺbku a šírku stratového kužeľa tretej rodiny častíc. Závislosti maximálneho nájdeného rastu na týchto zmenených parametroch sú znázornené na grafoch na obr. 5.8.

5.6 Hľadanie rezonančnej rýchlosti

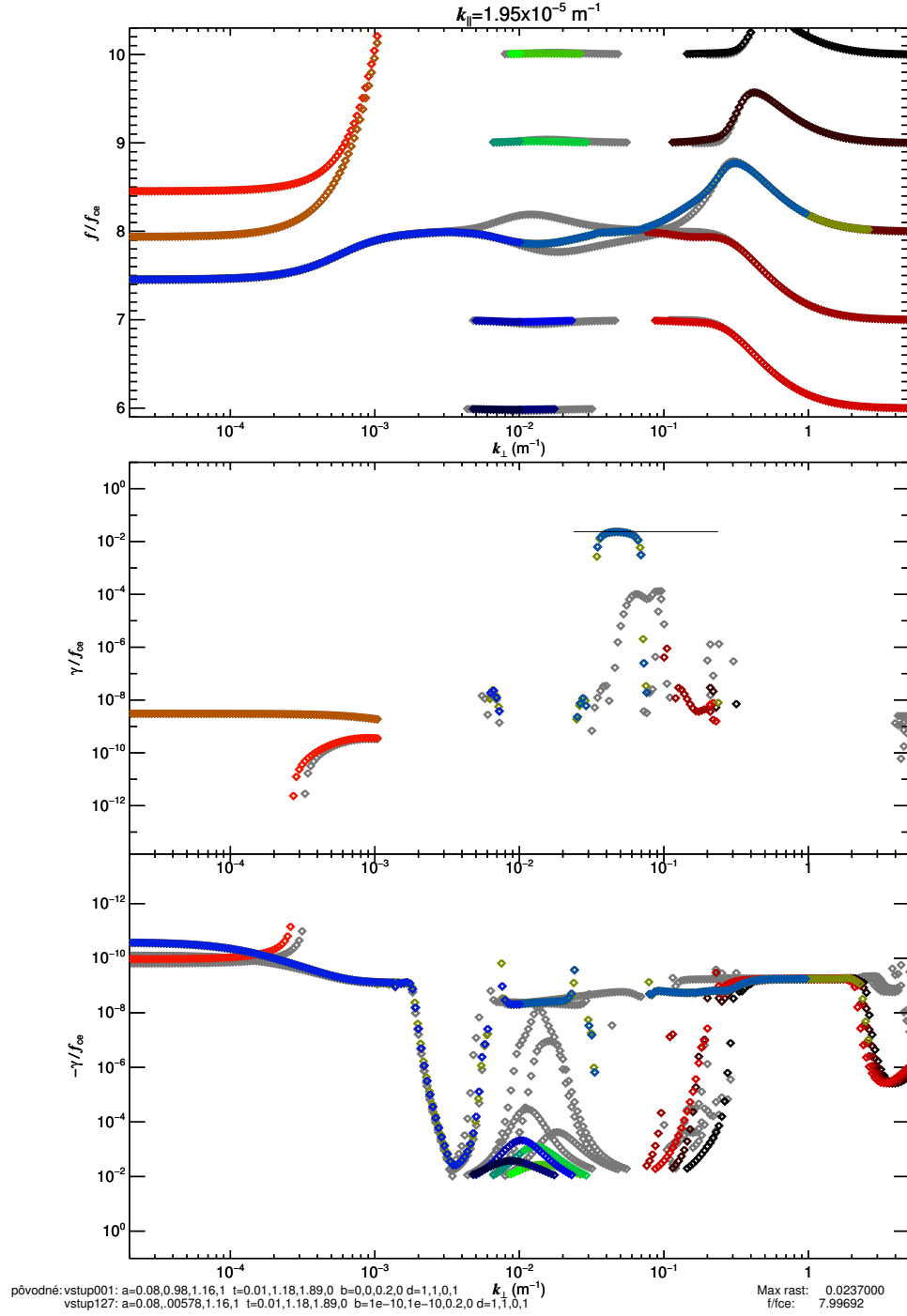
V snahe identifikovať štruktúry v distribučnej funkcii, ktoré sú zodpovedné za maximálny pozorovaný rast pre dané hodnoty parametrov plazmy, bola pre každú zmenu parametrov plazmy v grafe príslušnej distribučnej funkcie vyznačená (bielou prerušovanou čiarou) paralelná rezonančná rýchlosť $v_{\parallel \text{Res}}$ (pre Landauovu rezonanciu). Tá odpovedá vlne z grafu disperznej relácie s maximálnym pozorovaným rastom. Práve táto rýchlosť rozhoduje o tom, čiastice s akou paralelnou rýchlosťou sa dostanú do rezonancie s vlnou a môžu teda spolu interagovať a môže dôjsť k výmene energie. Príklad je na obr. 5.6 (distribučnej funkcii vľavo odpovedá disperzná relácia na obr. 5.7). Vlna s maximálnym rastom je na frekvencii $f/f_c = 7,99692$. Tejto frekvencii odpovedajú podľa (3.61) rôzne rezonančné rýchlosti podľa násobku n . Podľa grafu na obr. 5.9 (pre dané hodnoty ω_c a k_{\parallel}) je zrejmé, že ak chceme rezonančné rýchlosti v rozumnom rozsahu hodnôt, musíme zobrať n , ktoré je k $f/f_c \equiv \omega/\omega_c$ najbližšie. Na priradenie príslušnej rezonančnej rýchlosti k vlne s danou frekvenciou teda používam vzťah zobrazený na obr. 5.9.

5.7 Analýza stability

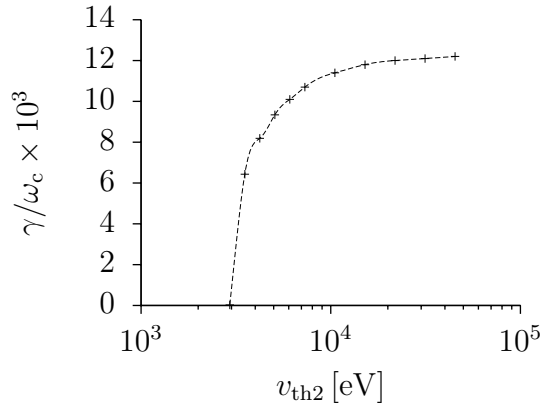
V tejto časti sa pokúsime analyticky výpočtom overiť nestabilitu (spôsobenú rezonanciou pri paralelnom šírení vlny) zo známeho tvaru (modelu) elektrónovej distribučnej funkcie. Analýze stability podľa distribučnej funkcie sa venuje *Kennel and Petschek* (1966) alebo aj *Gurnett and Bhattacharjee* (2005). *Kennel and Petschek* (1966) rozoberá hvizdový mód a dochádza k rovnakým záverom ako *Gurnett and Bhattacharjee* (2005), a to k vzťahu (3.74) (kde



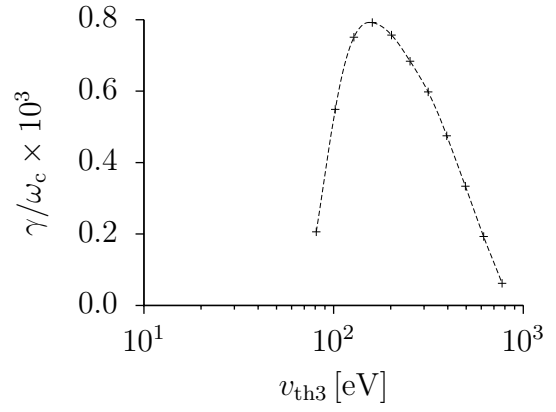
Obr. 5.6: Distribučná funkcia odpovedajúca zmeneným parametrom (vľavo) oproti pôvodným, nezmeneným (vpravo). Zmenený parameter: $\alpha_2 = 0,00578$.



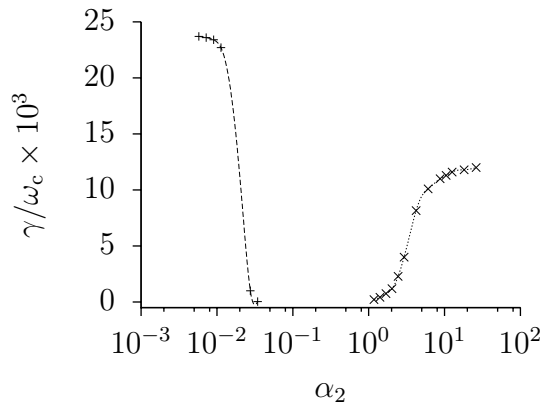
Obr. 5.7: Numericky získaná disperzná relácia odpovedajúca zmeneným parametrom ($\alpha_2 = 0,00578$) v závislosti na k_{\perp} pre $k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Na pozadí šedou farbou na porovnanie disperzná relácia s nezmenenými parametrami. Najväčší rast nastáva pri $k_{\perp} \approx 5 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ a pre frekvenciu $\omega/\omega_{ce} \approx 7,99692$.



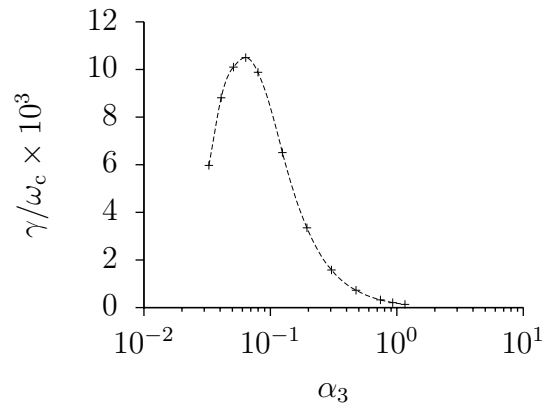
(a) teplota 2. zložky rastie



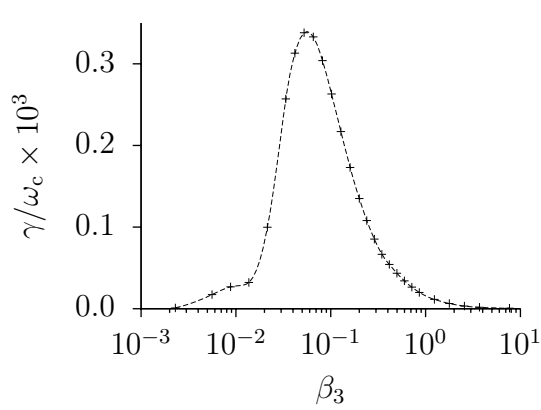
(b) teplota 3. zložky klesá



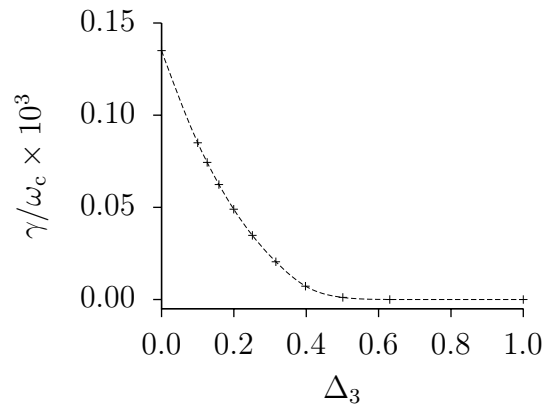
(c) α_2 klesá a rastie



(d) α_3 klesá

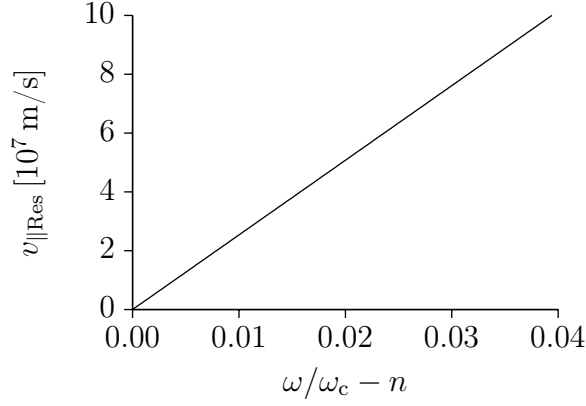


(e) β_3 klesá a rastie



(f) Δ_3 rastie

Obr. 5.8: Zmena maximálneho rastu v závislosti na postupnej zmene vybraných parametrov.



Obr. 5.9: Rezonančná rýchlosť podľa (3.61) pre $\omega_c = 2\pi 7875 \text{ Hz}$ a $k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$.

vystupuje $A_s = T_{s\perp}/T_{s\parallel} - 1$) pre bi-Maxwellovo rozdelenie, alebo pre distribučnú funkciu so stratovým kužeľom vo vzťahu (3.78), kde vystupuje A v tvare (3.79).

Ich rozbor je pre elektromagnetickú vlnu šíriacu sa paralelne, konkrétne hvizdový mód. Vlny, ktorých (ne)stabilitu sme hľadali, sú elektrostatické a šíria sa kolmo na magnetické pole (Bernsteinove módy). Preto musíme použiť vzťah rastu γ pre elektrostatické vlny, čo nás privádza späť k Harrisovej disperznej relácii (3.57) a vedie k vzťahu pre imaginárnu zložku disperznej relácie (3.60):

$$D_i = -\pi \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_n \int_0^{\infty} J_n^2 \left(\frac{v_{\perp} k_{\perp}}{\omega_c} \right) \cdot \left(\underbrace{k_{\parallel} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\parallel}}}_{\text{zvázok č.}} + \frac{n\omega_c}{v_{\perp}} \underbrace{\frac{\partial F_0}{\partial v_{\perp}}}_{\text{strat. kuž.}} \right) 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} \bigg|_{v_{\parallel \text{Res}} = (\omega - n\omega_c)/k_{\parallel}}, \quad (3.60)$$

z čoho získame rast

$$\gamma = \frac{-D_i}{\partial D_r / \partial \omega}. \quad (3.42)$$

Oproti prípadu hvizdového módu, kde pre kladnosť integrálu bolo potrebné zabezpečiť, aby bol výraz A (3.79) dostatočne kladný, v tomto prípade musíme pre overenie rastu spočítať celý integrál (3.60), dokonca nekonečnú sumu integrálov, ktoré sumujeme cez index n (kvôli Besselovým funkciám J_n).

Prvý prípad, ktorý analyzujeme, sú pôvodné, z fitu získané, nezmenené dáta. Parametre sú zhrnuté v tab. 5.2, disperzná relácia pre dané prostredie je na obr. 5.5, distribučná funkcia je graficky zobrazená na obr. 5.6 v pravom stĺpci (označenie „Nezmenená“).

Model obsahuje tri rodiny elektrónov. Distribučné funkcie odpovedajúce prvým dvom majú tvar bi-Maxwellovho rýchlostného rozdelenia (distribučná funkcia tvaru (5.1) sa v prípade bez stratového kužeľa $\Delta_s = 1$ redukuje

Model distribučnej funkcie

anizotropia	$T_{\perp}/T_{\parallel} = \alpha_1 = 0,08$ $\alpha_2 = 0,98$ $\alpha_3 = 1,16$
šírka strat. kuž.	$\beta_3 = 0,2$
hlĺbka strat. kuž.	$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ (bez strat. kužela) $\Delta_3 = 0$ (so strat. kuželom)
paralelná teplota	$v_{\parallel\text{th}1} = 10 \text{ eV} = 0,188 \times 10^7 \text{ m/s}$ $v_{\parallel\text{th}2} = 1180 \text{ eV} = 2,037 \times 10^7 \text{ m/s}$ $v_{\parallel\text{th}3} = 1890 \text{ eV} = 2,578 \times 10^7 \text{ m/s}$
<hr/> <i>Vlna</i> <hr/>	
zložky vlnového vekt.	$k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ $k_{\perp} = 0,1 \text{ m}^{-1}$
el. gyrofrekvencia	$\omega_c = 2\pi 7875 \text{ Hz}$

Tabuľka 5.2: Nezmenené parametre pre všetky tri zložky modelu distribučnej funkcie. Význam parametrov distribučnej funkcie ako podľa vzťahu (5.1).

Model distribučnej funkcie

anizotropia	$T_{\perp}/T_{\parallel} = \alpha_1 = 0,08$ $\alpha_2 = 0,00578$ $\alpha_3 = 1,16$
šírka strat. kuž.	$\beta_3 = 0,2$
hlĺbka strat. kuž.	$\Delta_1 = \Delta_2 = 1$ (bez strat. kužela) $\Delta_3 = 0$ (so strat. kuželom)
paralelná teplota	$v_{\parallel\text{th}1} = 10 \text{ eV} = 0,188 \times 10^7 \text{ m/s}$ $v_{\parallel\text{th}2} = 1180 \text{ eV} = 2,037 \times 10^7 \text{ m/s}$ $v_{\parallel\text{th}3} = 1890 \text{ eV} = 2,578 \times 10^7 \text{ m/s}$
<hr/> <i>Vlna</i> <hr/>	
zložky vlnového vekt.	$k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ $k_{\perp} = 0,05 \text{ m}^{-1}$
el. gyrofrekvencia	$\omega_c = 2\pi 7875 \text{ Hz}$

Tabuľka 5.3: Pozmenené parametre modelu distribučnej funkcie. Oproti pôvodným je zmenená anizotropia druhej zložky α_2 . Význam parametrov distribučnej funkcie ako podľa vzťahu (5.1).

na bi-Maxwellovo rozdelenie dané (3.72)), tretia obsahuje aj stratový kužeľ (zobrazený na obr. 5.10 (a)). Integrand (3.60) obsahuje člen s Besselovou funkciou a člen s parciálnymi deriváciami F_0 . Priebeh obidvoch členov integrandu pre tretiu zložku elektrónov (so stratovým kužeľom) je znázornený na obr. 5.10 (c-d). Všimnime si, že rád n Besselovej funkcie posúva polohu člena s Besselovou funkciou. Na ráde Besselovej funkcie záleží, v ktorých miestach a ako sa môže prejaviť druhý člen integrandu (obr. 5.10 (d)), ktorý obsahuje parciálne derivácie F_0 , ktoré reprezentujú potenciálne oblasti voľnej energie, vďaka ktorým môže nastať nestabilita vlny.

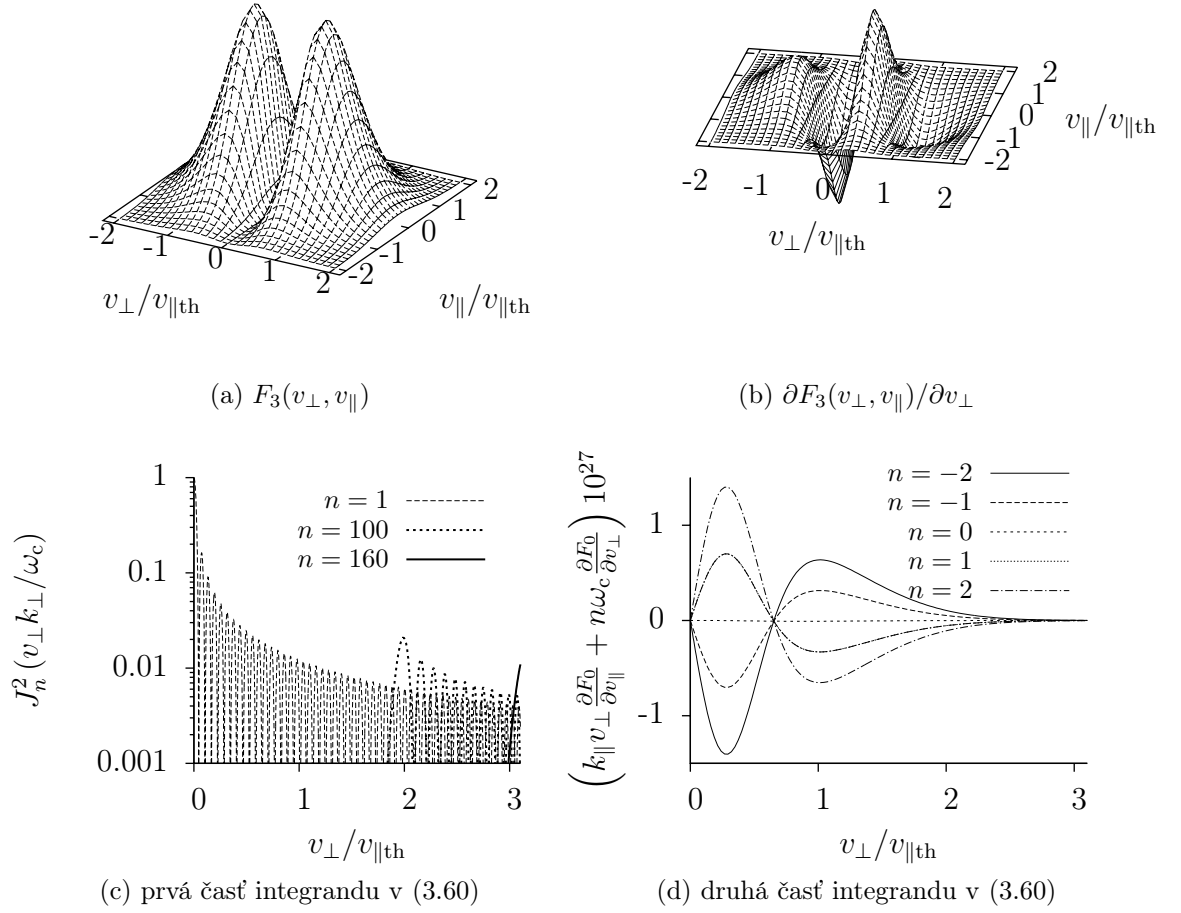
Z grafov je zrejmé, že (pre dané podmienky) druhý integrand je približne od tretieho násobku tepelnej rýchlosti nulový. To nám umožní numericky spočítať integrál, pričom hornú medzu integrálu je možné nastaviť na trojnásobok tepelnej rýchlosti (nie je nutné integrovať do nekonečna), a keďže v tejto oblasti začína člen so štvorcom Besselovej funkcie rádu $n = 160$, je možné nekonečnú sumu aproximovať sumou v rozsahu $n = -160 \dots 160$. Rozšírením hraníc overíme, že sa numerická hodnota výsledného integrálu nemení. Obdobným postupom získame hornú medzu integrálu a rozsah rádov Besselových funkcií pre všetky tri rodiny elektrónov. Integrály boli počítané numericky s využitím knižnice QUADPACK.

Hodnoty rastu pre jednotlivé samostatné zložky v závislosti na uhlovej frekvencii ω/ω_{ce} sú na obr. 5.11 (a). Rast prvých dvoch zložiek je záporný, tretia zložka so stratovým kužeľom má mierne kladný rast. Výsledný rast pre celkovú distribučnú funkciu je na grafe (b). Všetky body sú v zápornej oblasti. Vykreslené body sú však iba pre celočíselné násobky ω_{ce} . Jemnejšia analýza okolo týchto násobkov ukazuje zložitejší priebeh rastu — detail pre ôsmy násobok ω_{ce} je na grafe (c) (stále na obr. 5.11). Ak sa posúvame z $8\omega_{ce}$ na obidve strany, rast rastie a zo záporných hodnôt sa dostáva na chvíľu do kladných. So zväčšujúcou vzdialenosťou sa však rast rýchlo vráti na nulu. Na grafe (d) sú znázornené iba body s kladným rastom v logaritmickej škále na zvislej osi. Vidíme, že maximálny rast nastáva pre normovanú frekvenciu vzdialenú približne dve stotiny na obidve strany od $\omega/\omega_{ce} = 8$. To veľmi dobre odpovedá frekvencii, pri ktorej nastáva najväčší rast, získanej z grafu disperznej relácie na obr. 5.5. Preto túto frekvenciu platí $\omega/\omega_{ce} - 8 = -19,85 \times 10^{-3}$, čo sa krásne zhoduje s maximom rastu na grafe (d) na obr. 5.11.

Tento postup sme opakovali aj pre zmenené parametre (parametre v tab. 5.3, disperzná relácia resp. distribučná funkcia na obr. 5.7 resp. 5.6 (vľavo)). Od nezmenených parametrov sa líši anizotropiou druhej zložky α_2 a inou hodnotou k_\perp (z disperznej relácie na obr. 5.7 je jasné, že najväčší nárast je možné očakávať pri $k_\perp = 0,05 \text{ m}^{-1}$).

Výsledok pre pozmenené parametre je na obr. 5.12. Najprv na grafe (a) je rast pre celkovú distribučnú funkciu v celočíselných násobkoch ω_{ce} . Pre nízke násobky je rast záporný (stabilita), ale so zvyšujúcimi sa násobkami rast rastie a dostáva sa do kladných hodnôt s maximou pri 7 a 8-násobku ω_{ce} . Oproti predchádzajúcemu prípadu tu teda máme aj nestability. Zvislá os je v logaritmickej škále, a preto sú body s kladným rastom vykreslené podľa ľavej osi a body so záporným rastom podľa pravej osi.

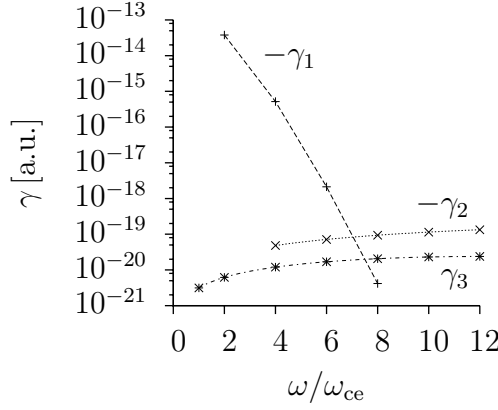
Znovu sme sa pozreli na jemnú štruktúru okolo celočíselného násobku ω_{ce} . Graf disperznej relácie pre tieto parametre (obr. 5.7) naznačuje, že najväčší



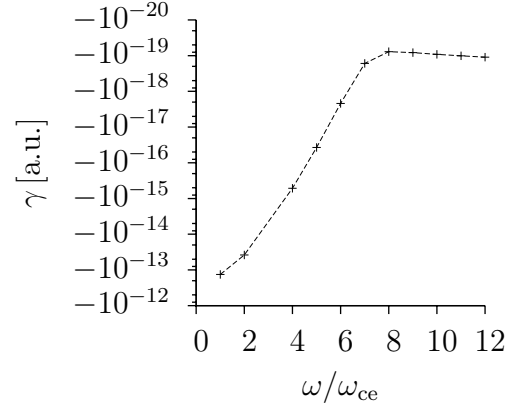
Obr. 5.10: Analýza nestability (rastu) distribučnej funkcie.

rast je možné očakávať pri $k_\perp \approx 0,05 \text{ m}^{-1}$ a pri frekvencii $\omega/\omega_{ce} \approx 7,99692$, a teda dosť blízko $8\omega_{ce}$. Detailné okolie rastu pre túto frekvenciu je na grafe (b) na obr. 5.12. Vidíme, že na rozdiel od predchádzajúceho prípadu je maximálny rast priamo na celočíselnom násobku. Podobne ako v predošlom prípade sa rast so zväčšujúcou vzdialenosťou od celočíselného násobku ω_{ce} rýchlo stráca.

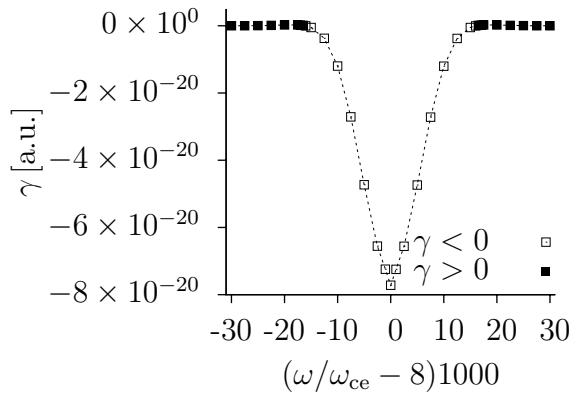
Pri zmenených parametroch sme dostali väčší rast ako pri pôvodných, čo súhlasí s maximálnymi odhadnutými rastmi podľa príslušných disperzných relácií (ktoré sú na obr. 5.5 a 5.7).



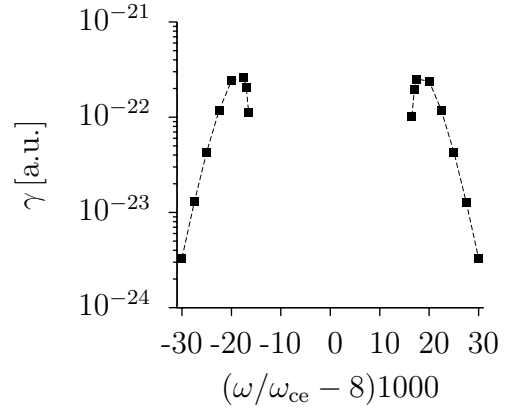
(a) hodnoty rastu pre jednotlivé populácie elektrónov



(b) celkový rast

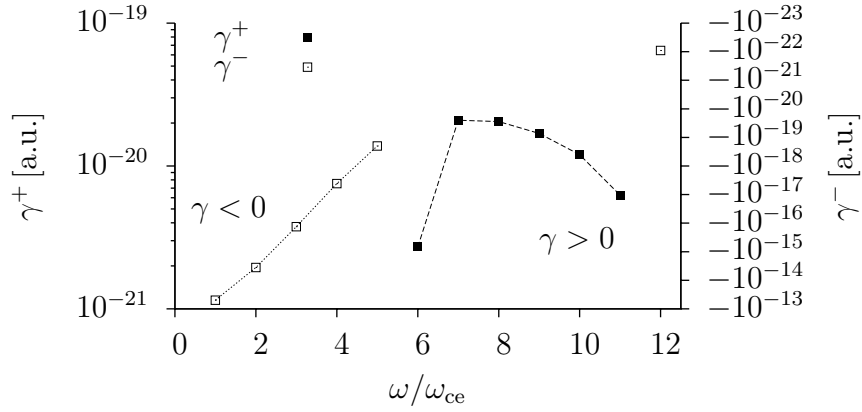


(c) detail rastu okolo $8\omega_{ce}$

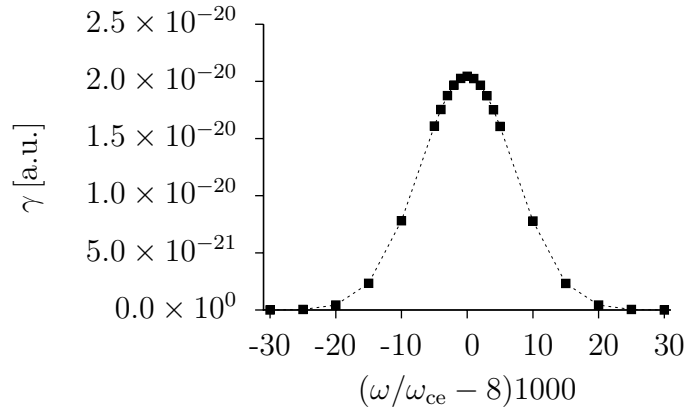


(d) detail rastu okolo $8\omega_{ce}$, $\gamma > 0$

Obr. 5.11: Výsledky integrovania (3.60) pre nezmenené parametre plazmy pre rôzne frekvencie. Na grafe (a) sú jednotlivé hodnoty rastu pre každú populáciu častíc zvlášť. Kladný príspevok je iba z tretej rodiny častíc (γ_3), ktorej distribučná funkcia obsahuje stratový kužel. Na grafe (b) sú výsledné hodnoty rastu. Priebiehy na (a-b) sú vyčíslené iba v celočíselných násobkoch ω_{ce} . Vidíme, že graf (b) získame sčítaním (s ohľadom na znamienka) kriviek z (a). Pri detailnejšom skúmaní okolia celočíselných násobkov ω_{ce} vidíme, že funkcia $\gamma = \gamma(\omega/\omega_{ce})$ má zložitejší priebeh — záporné hodnoty rastu (tlmenie) sa na chvíľu presunú do kladných hodnôt (nestabilita). Zvislá škála na grafe (c) je lineárna, zvislá škála na grafe (d) je logaritmická s oborom $\gamma > 0$. Body odpovedajúce kladnému rastu v (c-d) sú zobrazené plným štvorčekom.



(a) celkový rast vyčíslený v násobkoch ω_{ce}



(b) detail rastu okolo $8\omega_{ce}$

Obr. 5.12: Výsledky integrovania (3.60) pre pozmenené parametre plazmy (podľa tab. 5.3) pre rôzne frekvencie. Na grafe (a) sú výsledné hodnoty rastu pre celkovú distribučnú funkciu vyčíslené v celočíselných násobkoch ω_{ce} . Body s prázdnyim štvorčekom majú záporný rast (sú stabilné) a sú vynesené podľa pravej zvislej logaritmickkej osi (nula je „hore“). Body s plným štvorčekom majú kladný rast, sú nestabilné a odpovedá im ľavá zvislá os. Je teda vidieť, že s rastúcim násobkom ω_{ce} rast rastie a zo záporných hodnôt sa dostáva do kladných s maximom pri 7 a 8-násobku ω_{ce} . Jemná štruktúra okolo $8\omega_{ce}$ je na grafe (b). V tomto prípade je rast najväčší práve na $8\omega_{ce}$.

Kapitola 6

Diskusia a záver

Po teoretickej časti sme pomocou programu WHAMP počítali disperznú reláciu na základe distribučnej funkcie, ktorá bola modelom (5.1) naitovaná na dáta z elektrónového analyzátoru prístroja PEACE na družici misie Cluster II. Túto distribučnú funkciu sme rátali pre rôzne smery šírenia a identifikovali sme v nej rôzne módy šírenia elektrostatických a elektromagnetických vĺn (napr. elektromagnetické R a L módy a elektrostatické Langmuirove vlny pre paralelné šírenie a elektromagnetické O a dva X módy a elektrostatické Bernsteinove módy pre kolmé šírenie). Zvlášť jemný krok uhla θ sme zvolili v oblasti kolmého šírenia $\vec{k} \perp \vec{B}_0$.

Najväčší rast sme identifikovali pre smer šírenia $\theta = 89,9860^\circ$ a pre paralelnú zložku vlnového vektora $k_{\parallel} = 1,95 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Pre túto fixnú paralelnú zložku (interakcia vĺn a častíc na základe rezonancie súvisí s paralelnou zložkou k_{\parallel}) sme potom hľadali disperznú reláciu závislú na kolmej zložke k_{\perp} . V snahe pochopiť závislosť rastu na parametroch plazmy sme generovali veľké množstvo pozmenených distribučných funkcií pre rôzne pozmenené parametre plazmy a sledovali sme maximálny pozorovaný rast (imaginárnu zložku komplexnej frekvencie). Závislosť maximálneho rastu na zmene jednotlivých parametrov je na obr. 5.8. Týmto spôsobom sa nám podarilo nájsť distribučné funkcie s maximálnym rastom vyšším o niekoľko rádov, ale tie sa od pôvodnej distribučnej funkcie často značne odlišovali (mieru podobnosti s pôvodnou distribučnou funkciou sme odhadovali pomocou redukovaného χ_{red}^2 pomocou ktorého sa meria kvalita fitu *Press et al.* (1992)).

Dalej sme sa snažili overiť závislosť rastu na parametroch aj teoreticky výpočtom rastu. Skúmané vlny sú Bernsteinove módy, preto sme zvolili na výpočet γ vzťah (3.60), ktorý vychádza z Harrisovej relácie pre elektrostatické vlny (3.57). Rast γ bol z Harrisovej relácie odvodený aproximáciou pomalého rastu, teda za predpokladu $|\gamma| \ll |\omega|$. Výsledkom po numerickom integrovaní ((3.60) obsahuje integrály s Besselovými funkciami a nekonečnú sumu) je závislosť rastu na frekvencii, teda $\gamma = \gamma(\omega)$. Výpočet sme previedli pre dve distribučné funkcie — jednu pôvodnú a jednu zmenenú (s parametrami podľa tab. 5.3).

Výsledky sú na grafoch na obr. 5.11 a 5.12. V prvom prípade sme hodnoty rastu spočítali aj pre samostatné zložky častíc. Kladný rast (v plošne skúmaných celočíselných násobkoch ω_{ce}) vykazovala iba tretia rodina častíc, ktorá síce bola najmenej zastúpená (0,85 % z celkovej koncentrácie častíc s

rovnakým znamienkom), ale ako jediná mala distribučnú funkciu so strato-
vým kužeľom. Práve stratový kužeľ je potenciálnym miestom v distribučnej
funkcii s voľnou energiou, ktorá môže byť použitá na zosilenie vln.

Detailnejšie skúmanie $\gamma = \gamma(\omega)$ vo veľmi blízkom okolí harmonických násobkov odhaľuje zaujímavejší priebeh závislosti — s jemnou zmenou ω sa rast prudko mení a môže nadobudnúť aj celkové kladné hodnoty. Takúto jemnú štruktúru sme skúmali okolo $\omega = 8\omega_{ce}$, pretože z grafu disperznej relácie pre túto distribučnú funkciu bol pozorovaný najväčší rast práve pri frekvencii $\omega = \omega_{ce}(8 - 19,85 \times 10^{-2})$. Táto poloha sa zhoduje s najväčším pozorovaným rastom na obr. 5.11 na grafe (d). So zväčšujúcou sa vzdialenosťou od ôsmej harmonickej nestabilita prudko klesá k nule.

V prípade pozmenenej distribučnej funkcie sme jemnú štruktúru okolo harmonickej ω_{ce} tiež skúmali okolo ôsmeho násobku, pretože príslušná disperzná relácia (obr. 5.7) predpovedala maximálny rast takmer na ôsmom násobku elektrónovej cyklotrónovej frekvencie ($\omega = \omega_{ce}(8 - 3 \times 10^{-3})$). Aj tento predpoklad súhlasí, na grafe (b) na obr. 5.12 vidieť najvyšší rast pre ôsmu harmonicú ω_{ce} . So zväčšujúcou sa vzdialenosťou od tejto frekvencie rast prudko klesá k nule.

V oboch prípadoch bol maximálny rast pozorovaný na frekvencii veľmi blízkej hornej hybridnej frekvencii, ktorá odpovedá kolmým (vzhľadom na magnetické pole) elektrostatickým kmitom elektrónov.

Kapitola 7

Zoznam použitých značiek

R_Z	polomer Zeme, $R_Z \approx 6,378 \times 10^6$ m
\vec{B}, \vec{E}	magnetické a elektrické pole
ω	uhlová frekvencia
γ	rast, imaginárna časť komplexnej frekvencie
p	komplexná frekvencia pri Laplaceovej transformácii, $p = \gamma - i\omega$
ω_{ps}	uhlová plazmová frekvencia častíc s
ω_{cs}	uhlová cyklotrónová frekvencia častíc s
f	frekvencia, $\omega = 2\pi f$ (prípadne distribučná funkcia, podľa kontextu)
f_{cs}	cyklotrónová frekvencia častíc s
$\vec{v}, v_\perp, v_\parallel$	vektor rýchlosti a jeho kolmá a paralelná zložka
$\vec{k}, k_\perp, k_\parallel$	vlnový vektor a jeho kolmá a paralelná zložka
n_s	koncentrácia častíc s
n	celé číslo (prípadne koncentrácia, podľa kontextu)
N	index lomu
$D(\omega, \vec{k})$	disperzná relácia
f_s, F_s	distribučná funkcia a redukovaná distribučná funkcia častíc s
α	pitch uhol (uhol meraný od \vec{B}_0 k vektoru rýchlosti, $\tan \alpha = -v_\perp/v_\parallel$)
θ	uhol medzi \vec{B}_0 a k
v_{ths}	tepelná rýchlosť častíc s , $k_B T = 1/2 m_e v_{ths}^2$
α_s	anizotropia T_\perp/T_\parallel
β_s	šírka stratového kužela
Δ_s	hlbka stratového kužela ($\Delta_s = 1$ bez stratového kužela)

Literatúra

- Bernstein, I. B. (1958), Waves in a plasma in a magnetic field, *Phys. Rev.*, *109*(1), 10–21, doi:10.1103/PhysRev.109.10.
- Chen, F. (1984), *Introduction to plasma physics and controlled fusion, vol.1: Plasma physics*, Plenum press.
- European Space Agency (2012), Domovská webová stránka misie cluster.
- Grimald, S., and O. Santolík (2010), Possible wave modes of wideband nont-hermal continuum radiation in its source region, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, *115*, A06209, doi:10.1029/2009JA014997.
- Gurnett, D., and A. Bhattacharjee (2005), *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications*, Cambridge University Press.
- Hughes, W. J. (1995), The magnetopause, magnetotail, and magnetic re-connection, in *Introduction to Space Physics*, edited by M. Kivelson and C. Russell, p. 229, Cambridge University Press.
- Johnstone, A. D., C. Alsop, S. Burge, P. J. Carter, A. J. Coates, A. J. Coker, A. N. Fazakerley, M. Grande, R. A. Gowen, C. Gurgiolo, B. K. Hancock, B. Narheim, A. Preece, P. H. Sheather, J. D. Winningham, and R. D. Woodliffe (1997), Peace: A plasma electron and current experiment, *Space Science Reviews*, *79*, 351–398, doi:10.1023/A:1004938001388.
- Kennel, C. F., and H. E. Petschek (1966), Limit on Stably Trapped Particle Fluxes, *Journal of Geophysical Research*, *71*, 1.
- Landau, L. (1946), On the vibration of the electronic plasma, *J. Phys. USSR*, *10*, 25, english translation in *JETP* *16*, 574. Reproduced in *Collected papers of L.D. Landau*, edited and with an introduction by D. ter Haar, Pergamon Press, 1965, pp. 445–460; and in *Men of Physics: L.D. Landau*, Vol. 2, Pergamon Press, D. ter Haar, ed. (1965).
- Lang, K. R. (1995), *Sun, Earth and Sky*, Springer.
- May-Britt, K. (2001), *Space Physics*, second ed., Springer–Verlag.
- Menietti, J. D., P. Schippers, O. Santolík, D. A. Gurnett, F. Crary, and A. J. Coates (2011), Ion cyclotron harmonics in the Saturn downward current auroral region, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, *116*, A12234, doi:10.1029/2011JA017102.

- Mouhot, C., and C. Villani (2010), Landau damping, *Journal of Mathematical Physics*, *51*(1), 015,204–+, doi:10.1063/1.3285283.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery (1992), *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 2 ed., Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Rönnmark, K. (1982), Waves in homogeneous, anisotropic multicomponent plasmas (WHAMP), *Tech. rep.*
- Rönnmark, K. (1983), Computation of the dielectric tensor of a Maxwellian plasma, *Plasma Physics*, *25*, 699–701, doi:10.1088/0032-1028/25/6/007.
- Santolík, O., D. A. Gurnett, G. H. Jones, P. Schippers, F. J. Crary, J. S. Leisner, G. B. Hospodarsky, W. S. Kurth, C. T. Russell, and M. K. Dougherty (2011), Intense plasma wave emissions associated with Saturn’s moon Rhea, , *38*, L19204, doi:10.1029/2011GL049219.
- Stern, D. P. (1994), The art of mapping the magnetosphere, *Journal of Geophysical Research*, *99*, 17,169–17,198, doi:10.1029/94JA01239.